Chapitre 3

Suites : Premières notions

Sommaire

3.1 Activités

ACTIVITÉ 3.1.
On donne dans le tableau 3.1 de la présente page les effectifs, en million, de la population africaine depuis 1950.

TABLE 3.1: Tableau de l'activité 3.1

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Population	227,3	285	366,8	482,2	638,7	819,5	1011,2

1. Représenter cette évolution dans un repère.
2. Calculer les coefficients multiplicateurs permettant de passer de la population d'une décennie à celle de la suivante à partir de l'année 1950.
3. Un statisticien propose de modéliser la population africaine de la manière suivante : « À partir de 1950, tous les dix ans, la population africaine est multipliée par $1,28$ ».
   (a) Comment justifier sa démarche ?
   (b) Comparer le résultat obtenu par ce modèle en 2010 aux données réelles.
   Le modèle serait-il plus proche de la réalité avec un coefficient multiplicateur de $1,29$?

4. (a) Que fait l'algorithme donné dans la table 3.2 de la présente page ?
   (b) Le programmer sur sa calculatrice.
   (c) Le modifier afin qu'il n'affiche que le dernier terme calculé.
   (d) À l'aide de l'algorithme précédent, représenter cette évolution sur le même graphique.
   (e) À l'aide de l'algorithme précédent, estimer au cours de quelle décennie la population africaine dépassera 3 milliards.

ACTIVITÉ 3.2.
Pour chacune des suites de nombres suivantes :

1. Conjecturer, dans chaque cas, une manière d'obtenir le terme suivant.
2. Conjecturer, dans chaque cas, une manière d'obtenir le vingtième terme.

Rang n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n
0	0		1	$\frac{1}{1}$		100
1	1	-1	1,5	$\frac{3}{2}$	1	20
2	4	$\frac{1}{2}$	1,75	$\frac{7}{4}$	3	4
3	9	$-\frac{1}{3}$	1,875	$\frac{15}{8}$	5	0,8
4	16	$\frac{1}{4}$	1,9375	$\frac{31}{16}$	7	0,16
5	25	$-\frac{1}{5}$	1,96875	$\frac{63}{32}$	9	0,032

ACTIVITÉ 3.3.
Le Roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense.
Celui-ci répond (en ce temps là, on tutoyait les rois) :
« Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier ».
Le Roi sourit de la modestie de cette demande.
En réalité, cette demande était-elle vraiment modeste ?

TABLE 3.2: Algorithme de l'activité 3.1

```
Entrée(s)
    n
Initialisation
    u ← 227,3
Traitement
    Pour k allant de 1 à n
        u ← u × 1,28
        Afficher k
        Afficher u
    Fin pour
```

TABLE 3.3: Algorithme de l'activité 3.3

```
Entrée(s)
    n
Initialisation
    u ← 1
    s ← 0
Traitement
    Pour k allant de 1 à n
        u ← u × 2
        s ← s + u
    Fin pour
Sortie(s)
    Afficher s
```

1. On numérote les soixante-quatre cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier n ($1 \leqslant n \leqslant 64$), on note u_n le nombre de grains de blé que le Roi doit déposer dans la n-ième case.

   (a) Calculer u_1, u_2, ..., u_{10}.

   (b) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?

   (c) Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{64}.

2. On donne l'algorithme dans la table 3.3, page précédente.

   (a) Que fait cet algorithme ?

   (b) Entrer cet algorithme dans votre calculatrice.

   (c) Utiliser cet algorithme pour obtenir S, le nombre total de grains sur l'échiquier.

3.2 Généralités sur les suites

3.2.1 Définition et notations

Définition 3.1. Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n.
Ainsi $u : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{array} \right.$

Exemples.

1. La suite des carrés des nombres entiers est 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; etc. On peut écrire ces termes sous la forme $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; etc. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$.

2. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geqslant 1$, on la note $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

3. La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-5}$ n'est définie que pour $n \geqslant 5$, on la note $(u_n)_{n \geqslant 5}$.

Remarques (Vocabulaire, notations).

- n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n.

- *Attention :* (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.

3.2.2 Modes de génération d'une suite

Relevés chronologiques

Dans la « vie courante », les principales suites rencontrées sont obtenues par des relevés, en général chronologiques, en économie, ou des mesures en physique.
En mathématiques, nous nous intéresserons essentiellement aux suites définies mathématiquement (par des formules) dont l'objet sera la modélisation des suites précédentes et à l'étude de leurs propriétés mathématiques.

Définition par une formule explicite

Une suite *explicite* est une suite dont le terme général s'exprime en fonction de n. Elle est du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction. On a donc la définition suivante :

Définition 3.2. Soit f une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors définir une suite (u_n) de la façon suivante :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Remarques.

- On peut donc calculer directement n'importe quel terme de la suite à partir de l'indice n. C'est le côté agréable des suites explicites.
- Si f n'est définie que sur $[k; +\infty[$, avec $k > 0$, la suite n'est alors définie que pour $n \geqslant k$.

Exemples.

1. La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n - 1$. On a $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 2x - 1$. Par exemple $u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$.
2. Les suites de l'exemple précédent sont toutes des suites explicites. Les deux dernières sont définies, respectivement, pour $n \geqslant 1$ et pour $n \geqslant 5$.

Définition par récurrence

Une suite *récurrente* est définie par la donnée des premiers termes et la relation liant les termes de la suite (en général consécutifs). Plus généralement, on peut définir une suite récurrente de la façon suivante :

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de $u_0 \in I$ et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Exemple. $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ donne $u_0 = 4$; $u_1 = 2u_0 - 5 = 3$; $u_2 = 2u_1 - 5 = 1$; etc.

Remarques.

- Contrairement aux suites explicites, on ne peut pas, *a priori*, calculer un terme quelconque de la suite, sans avoir obtenu, avant, tous les termes le précédant.

  De nombreux exercices seront consacrés à obtenir, malgré tout, des moyens de calculer directement un terme donné, c'est-à-dire à transformer, lorsque c'est possible, la suite récurrente en une suite explicite.
- Toutes les fonctions f ne conviennent pas. Par exemple si $u_0 = 3$ et $f(x) = \sqrt{x-2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$, on a $u_1 = \sqrt{u_0 - 2} = \sqrt{1} = 1$. Par contre on ne peut pas calculer u_2, donc la suite n'est pas définie pour $n > 1$.

3.2.3 Représentation graphique d'une suite

Définition 3.4. Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$.

Remarque. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}$. $u_{1,5}$ n'a, mathématiquement, pas de sens et donc le point $(1,5; u_{1,5})$ non plus.

3.2.4 Monotonie d'une suite

Une suite est une fonction particulière, on retrouve donc naturellement la notion de sens de variation pour une suite.

Définition 3.5. Soit (u_n) une suite. On dit que :

- la suite (u_n) est *croissante* si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- la suite (u_n) est *décroissante* si, pour tout entier n : $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- la suite (u_n) est *constante* si, pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.

Définition 3.6. Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est *monotone* si son sens de variation ne change pas (elle reste croissante ou décroissante)

Remarque. On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Étudier la monotonie d'une suite c'est donc étudier ses variations.

3.3 Exercices et problèmes

3.3.1 Exercices

EXERCICE 3.1.
Pour chacune des suites données ci-dessous :

- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $v_n = 5 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $w_n = (n+1)^2 - n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $x_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer les cinq premiers termes.
2. Représenter la suite dans un repère adapté.
3. Étudier la monotonie de la suite.

3.3.2 Problèmes

PROBLÈME 3.1.
Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

- *Premier contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail;
- *Second contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

Question : Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

Indication : On pourra utiliser un algorithme.

PROBLÈME 3.2.
Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 5 % chaque année. En 1990, il y avait 500 adhérents.
Question : le nombre d'adhérents peut-il doubler et, si oui, en quelle année ?

Indications :
Pour chaque année à partir de 1990 on note u_n le nombre d'adhérents l'année $1990 + n$.

1. Quelle est la valeur de u_0 ? de u_1 ?
2. Étudier la monotonie de (u_n).
3. Utiliser la calculatrice pour répondre à la question.

PROBLÈME 3.3.
Lequel des deux nombres suivants est le plus grand ?

- $A = 2\,005(1+2+3+\ldots+2\,006)$
- $B = 2\,006(1+2+3+\ldots+2\,005)$

PROBLÈME 3.4.
Dans son ouvrage *Liber Abaci*, LÉONARD DE PISE (v. 1175 – v. 1250), plus connu sous le nom de FIBONACCI, a cherché à répondre à un problème sur le reproduction de lapins.
Il suppose que tout couple de lapins se reproduit au bout de deux mois de vie (il est alors adulte) et, tous les mois suivants, donne naissance à un couple de bébés lapins.
Un mois donné, on isole un couple de nouveau-nés dans un lieu clos.

1. (a) Combien de couples de lapins a-t-on au bout d'un mois ? De deux mois ? Et de trois mois ?
   (b) Expliquer pourquoi il y a cinq couples de lapins au bout de quatre mois.
   (c) Expliquer pour quoi, le mois suivant, ces cinq couples vont engendrer trois nouveaux couples. Combien de couples a-t-on au total ?
   (d) Combien de couples a-t-on au bout de six mois ? Justifier.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de couples de lapins au bout de n mois. Ainsi $u_0 = 1$.
   (a) Donner u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.
   (b) Quelle somme donne le nombre de couples de lapins un mois donné ?
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et de u_n.
   (d) Combien de couples de lapins a-t-on au bout d'un an ?
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de mois le nombre de couples de lapins dépassera 1 000.