

# Chapitre 5

## Nombre dérivé

### Sommaire

---

<b>5.1 Activités</b>	<b>49</b>
<b>5.2 Bilan et compléments</b>	<b>50</b>
5.2.1 Taux d'accroissement	50
5.2.2 Nombre dérivé	51
<b>5.3 Exercices</b>	<b>53</b>
5.3.1 Coefficients directeurs (rappels)	53
5.3.2 Lectures graphiques de nombres dérivés	54
5.3.3 Tracés	55
5.3.4 Calculs de nombres dérivés	55

---

### 5.1 Activités

**ACTIVITÉ 5.1** (Vitesse moyenne, vitesse instantanée).

Un corps en chute libre, avec une certaine vitesse initiale, a son altitude donnée au bout de  $t$  secondes par la fonction  $h$  (en mètres) définie, pour un temps  $t$  supérieur à 0, par :

$$h : t \longmapsto -4,9t^2 + 20t + 15$$

- Quelle est son altitude au départ de sa trajectoire?
  - Au bout de combien de temps touche-t-il le sol? *On appellera ce temps  $t_0$  pour la suite.*
- Tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[0; t_0]$ .
- Quelle est la variation de l'altitude entre l'instant  $t = 0$  et l'instant  $t = 1$ ?
  - Quelle est alors sa vitesse moyenne à laquelle cette altitude varie sur cet intervalle de temps?
  - Mêmes questions entre les instants :
    - $t = 1$  et  $t = 2$
    - $t = 2$  et  $t = 3$
    - $t = 3$  et  $t = 4$
    - $t = 4$  et  $t = t_0$ .
  - Comment peut-on retrouver graphiquement ces vitesses moyennes?
- Inventer une manière d'obtenir la vitesse initiale.

**ACTIVITÉ 5.2** (Nombre dérivé).

On s'intéresse à la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^2 + 25$  et on appelle  $\mathcal{P}$  sa courbe représentative.

On appelle :

- $T$  le point de  $\mathcal{P}$  d'abscisse 1 ;
- $T_h$  le point de  $\mathcal{P}$  d'abscisse  $1 + h$  où  $h$  est un réel ;
- $\mathcal{D}_h$  la sécante  $(TT_h)$  ;
- $m_h$  le coefficient directeur de  $\mathcal{D}_h$ .

1. On suppose que  $h = 1$ .

- (a) Déterminer l'abscisse  $x_1$  et  $y_1$  et l'ordonnée de  $T_1$ .
- (b) Déterminer  $m_1$  le coefficient directeur de la droite  $\mathcal{D}_1$ .

2. En vous inspirant que la question précédente, compléter le tableau suivant :

$h$	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$x_h$					
$y_h$					
$m_h$					

3. Montrer, par le calcul, que, dans le cas général,  $m_h = -2 - h$  pour  $h \neq 0$

4. Quand  $h$  tend vers 0 :

- (a) Vers quelle valeur tend  $m_h$  ?
- (b) Vers quel point tend  $T_h$  ?
- (c) Vers quelle droite tend la sécante  $\mathcal{D}_h$  ?
- (d) En déduire l'équation réduite de cette droite.

On appellera *tangente* à  $\mathcal{P}$  au point d'abscisse 1, la droite de laquelle se rapproche la sécante  $\mathcal{D}_h$  quand  $h$  tend vers 0 et on appellera *nombre dérivé de  $f(x)$  en 1* le coefficient directeur de la tangente.

## 5.2 Bilan et compléments

### 5.2.1 Taux d'accroissement

**Définition.** On appelle *taux d'accroissement* d'une fonction  $f$  entre deux nombres *distincts*  $a$  et  $b$  le nombre :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On parle parfois d'*accroissement moyen* d'une fonction.

On écrit la plupart du temps  $a + h$  à la place de  $b$  et la définition devient alors :

**Définition 5.1.** On appelle *taux d'accroissement* d'une fonction  $f$  entre deux nombres  $a$  et  $a + h$ , avec  $h \neq 0$ , le nombre :

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Les deux définitions sont équivalentes (il suffit de poser  $b = a + h$ ). C'est la seconde que nous utiliserons pour la suite.

### 5.2.2 Nombre dérivé

On a vu dans les activités que ce taux d'accroissement ou accroissement moyen *tendait* vers un accroissement « instantané » quand  $h$  *tendait* vers 0. Cet accroissement « instantané » est appelé *nombre dérivé* en mathématiques, et on a donc la définition suivante :

**Définition** (Dérivabilité et nombre dérivé). Si, quand  $h$  *tend* vers 0, la quantité  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  *tend* vers un nombre fini, on dit que la fonction  $f$  est *dérivable en  $a$*  et on appelle le nombre vers lequel *tend* cette quantité *nombre dérivé de  $f$  en  $a$* . On le note  $f'(a)$ .

*Remarques.*

- On note parfois  $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$  le taux d'accroissement, surtout en physique.  $\Delta x$  est la différence<sup>1</sup> entre deux valeurs de  $x$ ,  $\Delta f(x)$  celle entre les deux valeurs correspondantes de  $f(x)$ .
- On note parfois  $\frac{df(x)}{dx}$  le nombre dérivé. Le  $d$  indique là encore une différence mais entre deux valeurs infiniment proches.
- Ces nombres correspondent à des quantités concrètes qui dépendent de la nature de la fonction  $f$  ou de la variable. Ainsi, si  $f(t)$  est la distance parcourue au bout d'un temps  $t$ , la variation moyenne ne sera rien d'autre que la vitesse moyenne et le nombre dérivé est la vitesse instantanée.

**Exemple 5.1.** La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 7$  est-elle dérivable en  $a = 2$ ?

Pour le savoir étudions la quantité suivante :  $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ .

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} \\ &= \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} \\ &= 12 + 6h + h^2 \text{ avec } h \neq 0 \end{aligned}$$

Lorsque  $h$  *tend* vers 0 (en restant différent de 0),  $12 + 6h + h^2$  *tend* vers 12. Donc  $f$  est dérivable en  $a = 2$  et son nombre dérivé en 2 est 12. On note alors  $f'(2) = 12$ .

#### Notation $\lim$

Pour alléger les rédactions, les mathématiciens ont inventé une notation que nous utiliserons pour la suite :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  qui signifie, ici, « quand  $x$  tend vers  $a$  alors la quantité  $f(x)$  tend vers  $b$  ». Elle peut être utilisée aussi bien avec  $a$  et  $b$  réels qu'avec  $a = \pm\infty$  et  $b = \pm\infty$ . Ou bien même avec des suites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  qui signifie que lorsque  $n$  devient grand la quantité  $\frac{1}{n}$  tend, elle, vers 0.

Revenons sur la définition de la dérivabilité d'une fonction en un nombre  $a$  :

**Définition 5.2.** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Si pour  $a \in I$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A$  avec  $A$  un réel, alors  $f$  est dite *dérivable en  $a$*  et on note  $A$ ,  $f'(a)$ , ce nombre s'appelant *le nombre dérivé de  $f$  en  $a$* .

1.  $\Delta$  est la lettre grecque correspondant à  $D$

### Interprétation graphique du nombre dérivé

**Définition 5.3** (Tangente à une courbe). On appelle *tangente à une courbe  $\mathcal{C}$  en un point  $M$* , appartenant à  $\mathcal{C}$ , une droite passant par  $M$  et qui, si elle existe, est aux alentours de  $M$ , la droite la plus proche de  $\mathcal{C}$ .

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $A(a; f(a))$  et  $B(a+h; f(a+h))$ , deux points de cette courbe.

La quantité  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  est le coefficient directeur de la droite  $(AB)$ , sécante à la courbe.

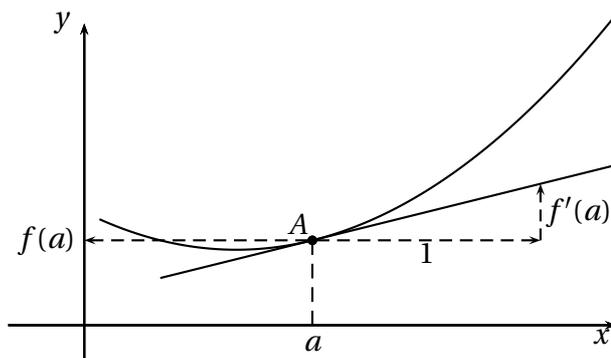
Lorsque  $h$  tend vers 0, la sécante  $(AB)$  tend vers la tangente à la courbe au point  $A$  et le nombre  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  tend vers le coefficient directeur de la tangente en  $A$ .

On a donc la propriété suivante, qu'on admettra :

**Propriété 5.1.** Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  et  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ . Le nombre dérivé  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ .

Le schéma 5.1 de la présente page illustre cette propriété.

FIGURE 5.1: Interprétation graphique du nombre dérivé



*Remarque.* Le point  $A(a; f(a))$  est un point de la courbe et est aussi un point de la tangente; en particulier, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente. Cela nous permet d'obtenir, dans le cas général, l'équation de la tangente.

**Propriété 5.2.** Soit  $f$  une fonction définie et dérivable en  $a$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative. Alors  $\mathcal{C}$  admet en son point d'abscisse  $a$  une tangente  $T_a$  d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

La preuve sera faite en classe.

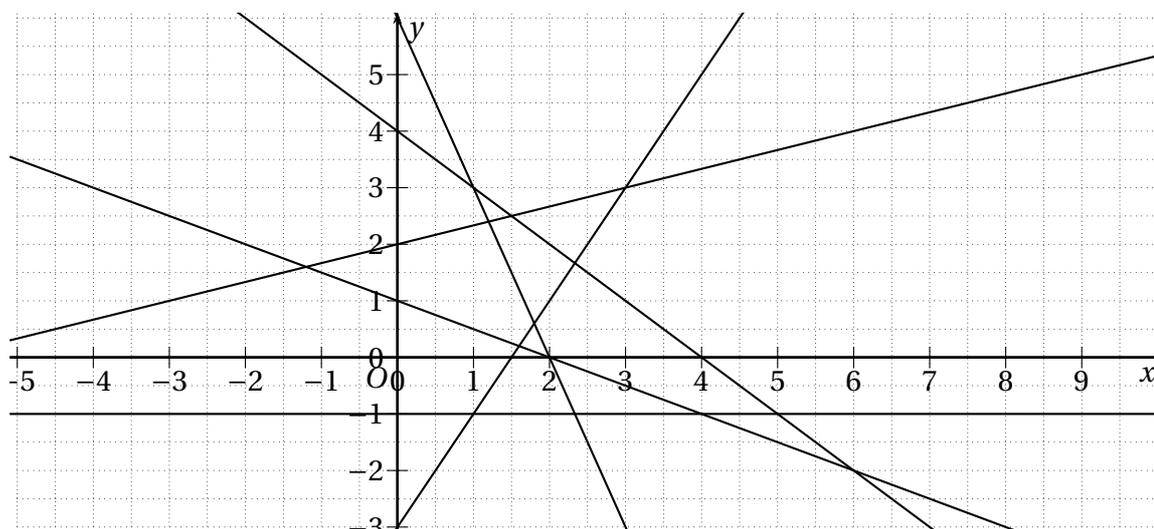
## 5.3 Exercices

### 5.3.1 Coefficients directeurs (rappels)

#### EXERCICE 5.1.

Déterminer graphiquement les coefficients directeurs  $m$  des droites de la figure 5.2 de la présente page (on les indiquera sur le graphique).

FIGURE 5.2: Figure de l'exercice 5.1

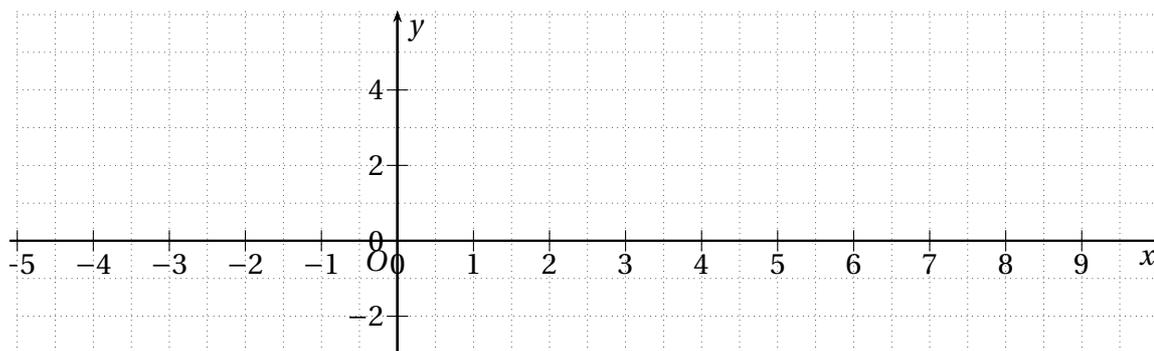


#### EXERCICE 5.2.

Dans le repère de la figure 5.3 de la présente page, représenter les droites suivantes :

- $\mathcal{D}_1$  passant par le point  $A(0; 1)$  et de coefficient directeur  $m = 2$ ;
- $\mathcal{D}_2$  passant par le point  $B(1; 0)$  et de coefficient directeur  $m = -1$ ;
- $\mathcal{D}_3$  passant par le point  $C(-1; -1)$  et de coefficient directeur  $m = \frac{1}{4}$ ;
- $\mathcal{D}_4$  passant par le point  $D(1; 2)$  et de coefficient directeur  $m = -\frac{2}{3}$ ;
- $\mathcal{D}_5$  passant par le point  $E(2; -3)$  et de coefficient directeur  $m = \frac{3}{5}$ ;
- $\mathcal{D}_6$  passant par le point  $A(0; 3)$  et de coefficient directeur  $m = 0$ ;

FIGURE 5.3: Figure de l'exercice 5.2



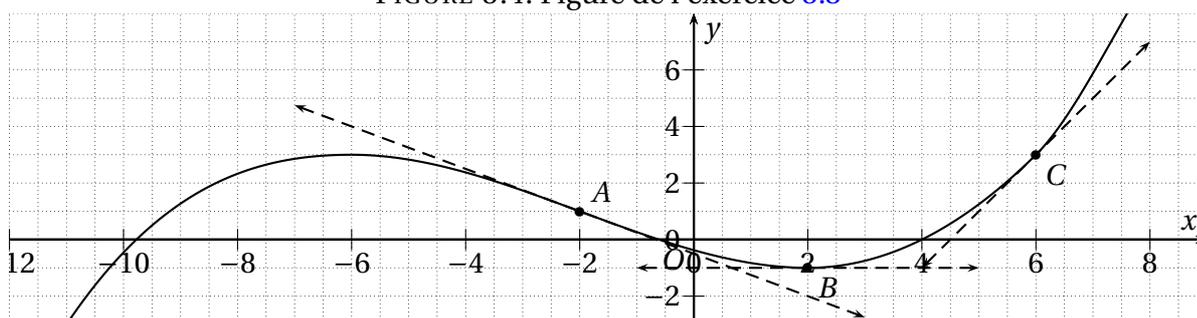
### 5.3.2 Lectures graphiques de nombres dérivés

#### EXERCICE 5.3.

On donne sur la figure 5.4 de la présente page la courbe représentative  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  en  $y$  indiquant les droites tangentes aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

1. Donner par lecture graphique  $f(-2)$  et  $f(6)$
2. Donner par lecture graphique  $f'(-2)$ ,  $f'(6)$  et  $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $-2$ .

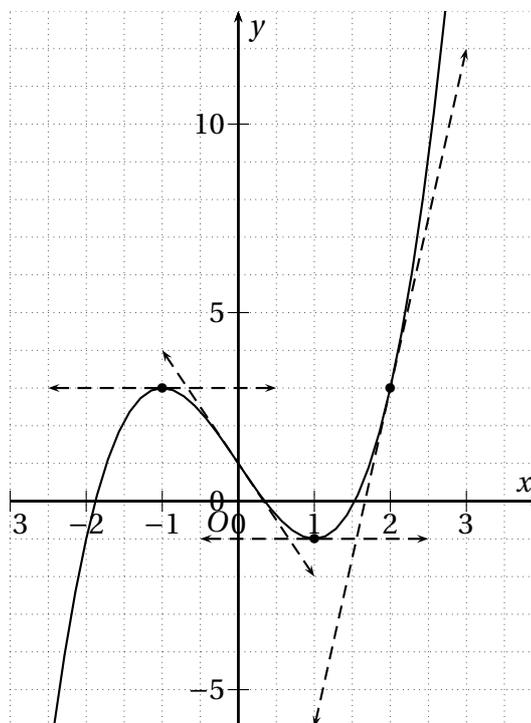
FIGURE 5.4: Figure de l'exercice 5.3



#### EXERCICE 5.4.

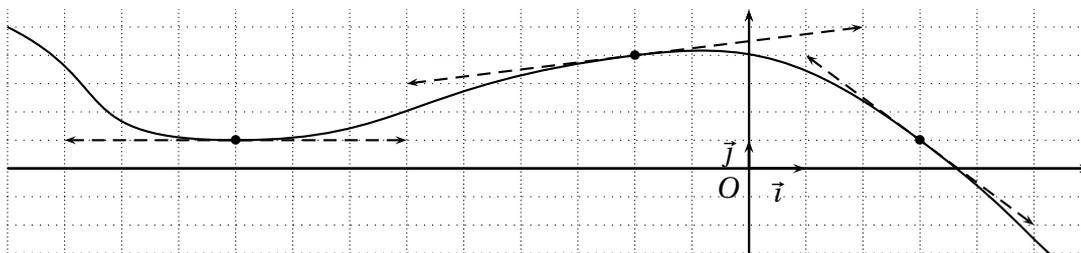
La courbe  $\mathcal{C}$  de la figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :
  - (a)  $f(0)$  et  $f'(0)$ ;
  - (b)  $f(-1)$  et  $f'(-1)$ ;
  - (c)  $f(2)$  et  $f'(2)$ ;
  - (d) L'équation de la tangente  $T_{-1}$  au point d'abscisse  $-1$ ;
  - (e) L'équation de la tangente  $T_0$  au point d'abscisse  $0$ .
2. La droite  $T$  tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $-2$  et d'ordonnée  $-1$  passe par le point  $A$  de coordonnées  $(1; 26)$ 
  - (a) Déterminer par le calcul une équation de  $T$ .
  - (b) En déduire  $f'(-2)$ .



**EXERCICE 5.5.**

On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative  $\mathcal{C}$  d'une fonction définie  $f$  sur  $\mathbb{R}$  ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.



1. Donner par lecture graphique  $f(3)$ ,  $f(-2)$  et  $f(-9)$ .
2. Donner par lecture graphique  $f'(3)$ ,  $f'(-2)$  et  $f'(-9)$ .
3. Déterminer l'équation réduite de  $T$ , la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 3.

**5.3.3 Tracés****EXERCICE 5.6.**

Tracer une courbe  $\mathcal{C}$  représentant une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-3; 3]$  dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et ayant les propriétés suivantes :

- $f$  est décroissante sur  $[-3; 0]$ ;
- $f(0) = -2$  et  $f'(0) = 0$ ;
- $f(3) = 9$ .

**EXERCICE 5.7.**

Tracer une courbe  $\mathcal{C}$  représentant une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 9]$  ayant les propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$ ;
- $f(3) = 6$  et  $f'(3) = 1$ ;
- $f(6) = 6$  et  $f'(6) = -4$ .
- $f(1) = 3$  et  $f'(1) = 2$ ;
- $f(5) = 7$  et  $f'(5) = 0$ ;

**EXERCICE 5.8.**

Tracer une courbe  $\mathcal{C}$  représentant une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 5]$  ayant les propriétés suivantes :

- $f(0) = 1$ ;
- $f(3) = -1$  et  $f(5) = -1$ ;
- $f$  est décroissante sur l'intervalle  $[0; 2]$ ;
- $f'(2) = 0$ ,  $f'(3) = 1$  et  $f'(5) = -1$ ;
- $f$  admet en 2 un minimum égal à  $-3$ ;
- pour tout  $x \in [2; 5]$ ,  $f(x) < 0$ .

**5.3.4 Calculs de nombres dérivés****EXERCICE 5.9.**

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction est dérivable et, le cas échéant, déterminer par le calcul son nombre dérivé.

1.  $f(x) = 3x + 7$  en  $-2$ .
2.  $f(x) = x^2 - 2x$  en 3.
3.  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  en  $-1$ .
4.  $f(x) = 2x^2 - x + 1$  en 4.
5.  $f(x) = x^3 + 2x - 1$  en 1.
6.  $f(x) = \frac{1}{x}$  en 1.
7.  $f(x) = \sqrt{x}$  en 2.