Chapitre 2

Géométrie repérée

Sommaire

2.1 Rappels	13
2.1.1 Vecteurs sans coordonnées	13
2.1.2 Vecteurs avec coordonnées	14
2.2 Exercices	16

On se propose dans ce micro-chapitre de rappeler des notions du programme de Seconde (sans redémontrer les propriétés) et de les réactiver à l'aide d'exercices.

2.1 Rappels

2.1.1 Vecteurs sans coordonnées

Définition. Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

Définition 2.1. On appelle et on note *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ le bipoint associé à la translation qui transforme A en B .
 A est appelé *origine du vecteur*, B est appelé *extrémité du vecteur*.

Définition 2.2. Deux vecteurs sont dits *égaux* s'ils sont associés à une même translation.

Propriété 2.1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme

Remarque. Attention à l'ordre des lettres : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme ou $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Définition 2.3. Un vecteur non nul est déterminé par :

- sa *direction*;
- son *sens*;
- et sa longueur, appelée *norme du vecteur*.

Et on a alors la propriété :

Propriété 2.2. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Définition 2.4. La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultat de la composition des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

Propriété 2.3 (Relation de CHASLES). Pour tous points A, B et C , on a : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Propriété 2.4 (Règle du parallélogramme). Pour tous points A, B, C et D on a : $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme.

Définition 2.5. On appelle *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues. La translation associée laisse tous les points invariants. On appelle *vecteurs opposés* tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$. On peut noter $\vec{u} = -\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$.

Propriété 2.5. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$ sont des vecteurs opposés. On a donc $\vec{AB} = -\vec{BA}$ et $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

Définition 2.6. Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur dont :

- la direction est la même que celle de $\vec{u}$
- le sens est le même que celui de $\vec{u}$ si $k > 0$, et de sens opposé si $k < 0$
- la norme est $|k| \times \|\vec{u}\|$

Définition 2.7. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'ils ont même direction $\Leftrightarrow$ s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $0\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété 2.6. Soient A, B, C et D quatre points du plan.

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{AC} \text{ colinéaires}$$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{CD} \text{ colinéaires}$$

2.1.2 Vecteurs avec coordonnées

Propriété 2.7. Le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple $(x; y)$, appelé coordonnées de $\vec{u}$, tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Remarque. On notera que l'origine du repère n'a pas d'importance dans les coordonnées d'un vecteur et que le vecteur nul a pour coordonnées $(0; 0)$.

Propriété 2.8. Le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k un nombre.

- $\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$
- $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky)$

Propriété 2.9. Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Alors la norme du vecteur $\vec{u}(x; y)$ est donnée par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition 2.8. Le plan étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle *coordonnées* du point M le couple $(x; y)$ tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, x étant appelé *abscisse* de M et y étant appelé *ordonnée* de M .

Les coordonnées du point M sont donc les coordonnées du vecteur $\vec{OM}$. Cela implique qu'elles dépendent de l'origine du repère.

Propriété 2.10. Le plan est muni d'un repère. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $I(x_I; y_I)$ milieu de $[AB]$.
Alors $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Propriété 2.11. Le plan est muni d'un repère. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.
Alors les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.

Propriété 2.12. Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit A et B deux points du plan P de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.
Alors la distance AB est donnée par $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Propriété 2.13. Le plan est muni d'un repère.
Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$.

Théorème 2.14. Le plan est muni d'un repère.

- Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.
- L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite

Définition 2.9. Le plan est muni d'un repère.
Soit $\mathcal{D}$ une droite et A et B deux points de cette droite. On appelle *vecteur directeur* de $\mathcal{D}$ tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ colinéaire à $\vec{AB}$.

Théorème 2.15. Le plan est muni d'un repère.
Toute droite admettant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ admet $\vec{v} = (-b; a)$ comme vecteur directeur.

Propriété 2.16. Le plan est muni d'un repère.
Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$. Alors $\vec{v}(1; m)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Propriété 2.17. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

2.2 Exercices

EXERCICE 2.1.

Le plan est muni d'un repère quelconque.

On donne les points $A(-5; 3)$, $B(-4; 1)$ et $C(1; -4)$.

1. Déterminer les coordonnées de I , milieu de $[AC]$.
2. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 2.2.

Le plan est muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient les points $A(-9; -10)$, $B(2; 9)$, $C(5; 3)$, $D(-1; -8)$ et $E(3; 0)$.

1. Les points C , D et E sont-ils alignés?
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles?

EXERCICE 2.3.

Le plan est muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-2; 2)$, $B(-3; -3)$, $C(5; 1)$ et $D(2; 4)$. E est le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?
2. Montrer que $ABED$ est un parallélogramme.
3. Déterminer si O appartient à la droite (AE) .

EXERCICE 2.4.

$ABCD$ est un parallélogramme.

A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées des points A' , E et D dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$
2. Montrer que les points A' , E et D sont alignés

Dans les exercices suivants, le plan est muni d'un repère quelconque.

EXERCICE 2.5.

On considère les points $A(-1; 2)$, $B(1; 3)$ et $C(195; 100)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
À l'aide de cette équation déterminer si A , B et C sont alignés.
2. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est-elle parallèle à (AB) ?
3. Le point C appartient-il à la droite Δ passant par le point $J(0; 1)$ et de coefficient directeur $\frac{3}{5}$?

EXERCICE 2.6.

On donne $A(1; 2)$, $B(2; 1)$ et $C(-3; 0)$. Déterminer les équations des droites suivantes :

1. $\mathcal{D} = (BC)$;
2. $\mathcal{D}'$ passant par C et de vecteur directeur $\vec{AB}$;
3. Δ parallèle à $\mathcal{D}$ passant par A ;
4. Δ' parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par B .

EXERCICE 2.7.

Déterminer si les droites suivantes sont parallèles et, si elles ne le sont pas, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

- $\mathcal{D}_1 : x + 2y - 1 = 0$
- $\mathcal{D}_2 : y = -\frac{x}{2} + 3$
- $\mathcal{D}_3 : -2x + 3y + 5 = 0$

EXERCICE 2.8.

ABC est un triangle non aplati. I et J sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, déterminer les coordonnées des points I et J .
2. Déterminer une équation cartésienne des droites (BC) et (IJ) .
3. Montrer que la droite (IJ) passe par le milieu O du segment $[BC]$.

EXERCICE 2.9 (résolu).

Vous trouverez ci-dessous des exemples « résolus » avec dans la première colonne le nom de la droite, dans la deuxième ses caractéristiques, dans la troisième une équation cartésienne et dans la quatrième son équation réduite.

Entraînez-vous à l'aide des caractéristiques de la droite à obtenir une équation cartésienne équivalente ou son équation réduite.

Nom	Caractéristiques	une équation cartésienne	l'équation réduite
$\mathcal{D}_1$	passant par $A(1; 2)$ et $B(3; 1)$	$x + 2y = 5$	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
$\mathcal{D}_2$	passant par A et $C(-1; -2)$	$2x - y = 0$	$y = 2x$
$\mathcal{D}_3$	passant par A et $D(-1; 5)$	$3x + 2y = 7$	$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$
$\mathcal{D}_4$	passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}$	$x = 3$	pas d'équation réduite
$\mathcal{D}_5$	passant par D et parallèle à (AC)	$2x - y = -7$	$y = 2x + 7$
$\mathcal{D}_6$	passant par C et parallèle à (AB)	$x + 2y = -5$	$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
$\mathcal{D}_7$	passant par A et de vecteur directeur $\vec{i}(1; 0)$	$y - 2 = 0$	$y = 2$