Chapitre 10

Fonctions de référence

Sommaire

10.1 Fonctions affines

10.1.1 Activité d'introduction

ACTIVITÉ 10.1.
Trois taxis T_1, T_2 et T_3 proposent les tarifs suivants :

- T_1 : 5 € de prise en charge, puis 0,40 € du kilométre ;
- T_2 : 4 € de prise en charge, puis 0,50 € du kilométre ;
- T_3 : 7 € de prise en charge, puis 0,30 € du kilométre ;

1. Quel est le taxi le plus économique pour un trajet de
   - 5 km ?
   - 10 km ?
   - 15 km ?
2. On note x la distance que veut parcourir un client en taxi. Exprimer les tarifs $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ des taxis T_1, T_2 et T_3 en fonction de x.
3. Représenter dans le repère 10.1 page suivante les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ des fonctions f_1, f_2 et f_3.

4. En vous basant sur le graphique, indiquez pour quelles distances il est plus économique de prendre le taxi T_1, la taxi T_2 ou le taxi T_3. *On donnera les réponses sous forme d'intervalle.*

5. Un client désire faire plus de 20 km, et choisira le taxi T_3. Il vous charge étudier le coÃ»t de son trajet en fonction de la distance x.

   (a) Compléter le tableau 10.1 de la présente page

   (b) La distance et le coÃ»t sont-ils des grandeurs proportionnelles ?

   (c) À l'aide du tableau précédent conjecturer de combien augmente le coÃ»t lorsque la distance augmente de :
   - 1 km
   - 2 km
   - 5 km

   (d) Que peut-on dire alors des grandeurs « augmentation de la distance » et « augmentation du coÃ»t » ?

FIGURE 10.1: Repère de l'activité 10.1

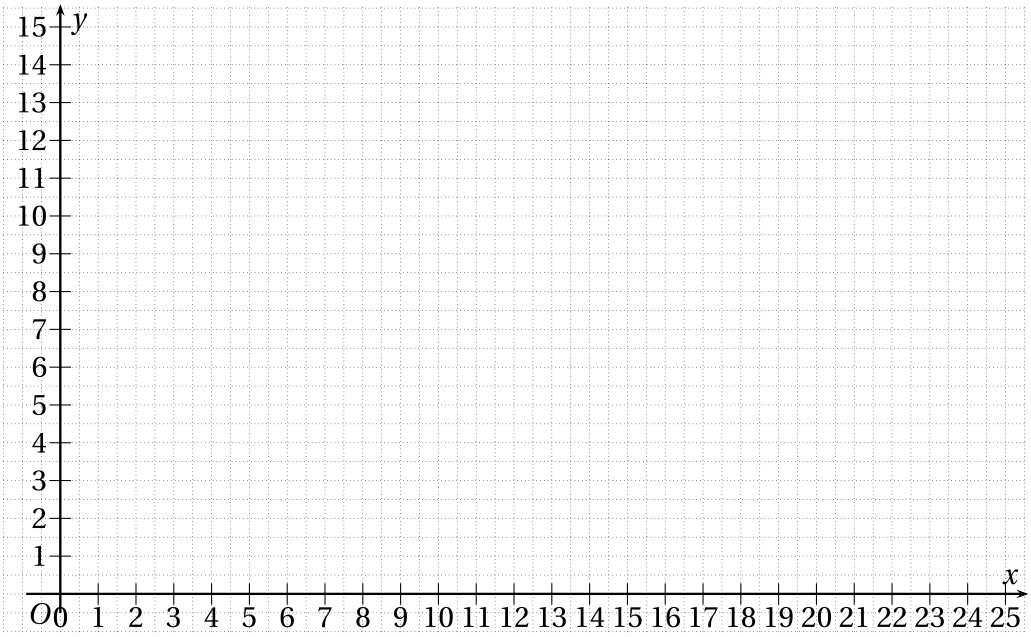


TABLE 10.1: Tableau de l'activité 10.1

Distance x	20	21	22	23	24	25	30	40	50
CoÃ»t $f_3(x)$									

10.1.2 Bilan et compléments

Définition 10.1. Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme

$$f(x) = mx + p \text{ où } m \text{ et } p \text{ sont des réels}$$

sont appelées *fonctions affines*.
Cas particuliers :

- si $m = 0$ alors $f : x \mapsto p$ est dite *constante* ;
- si $p = 0$ alors $f : x \mapsto mx$ est dite *linéaire*.

Propriété 10.1. *La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite. Celle d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.*

La preuve sera faite en classe.

Propriété 10.2. *Soit* $f : x \mapsto mx + p$ *une fonction affine.*

- *Si* $m > 0$ *alors* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Si* $m < 0$ *alors* f *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Si* $m = 0$ *alors* f *est constante sur* $\mathbb{R}$.

La preuve sera faite en classe.

Propriété 10.3. *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$.

- *Si les variations des* x *et des* $f(x)$ *sont proportionnelles, alors* f *est une fonction affine.*
- *Réciproquement, si* f *est une fonction affine, alors les variations des* x *et des* $f(x)$ *sont proportionnelles.*

Dit autrement, on a :
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *=constante* $\Leftrightarrow$ f *est une fonction affine.*
Ou encore :
Pour tout x *et* x', $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ *=constante* $\Leftrightarrow$ f *est une fonction affine*

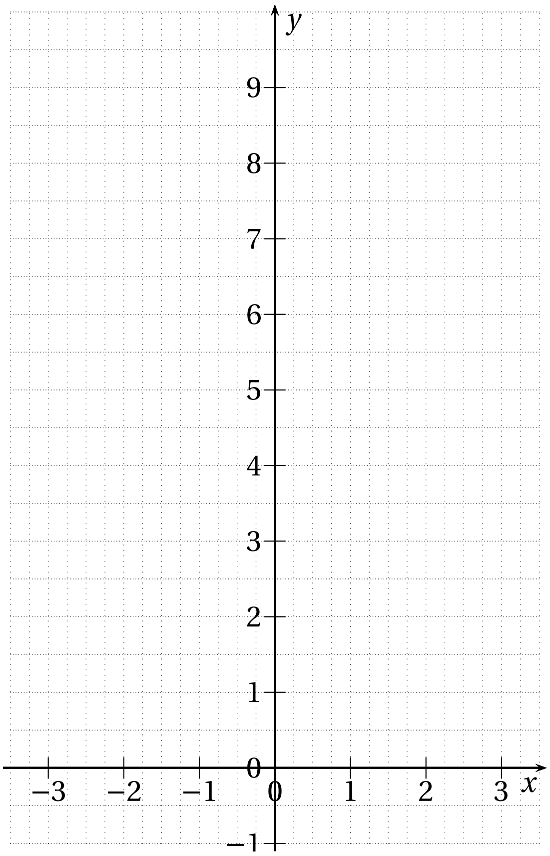
On l'admettra.

10.2 Fonction carré

Définition 10.2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ est appelée *fonction carrée*.

ACTIVITÉ 10.2.
Soit f la fonction carrée.

1. Montrer que la fonction carrée est paire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonction carrée dans le repère ci-contre.
   Ce type de courbe s'appelle une *parabole*.
4. Quel semble être le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$?
   Démontrons cette conjecture.
   (a) Factoriser $a^2 - b^2$
   (b) Soit $0 \leqslant a < b$.
      i. Quel est le signe de $a - b$?
      ii. Quel est le signe de $a + b$?
      iii. En déduire le signe de $a^2 - b^2$.
      iv. En déduire le sens de variation de $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$.
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^-$.



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$f(x)$													

Propriété 10.4. *Soit f la fonction carrée.*

- *La fonction carrée est une fonction paire.*
- *Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et admet comme minimum 0.*

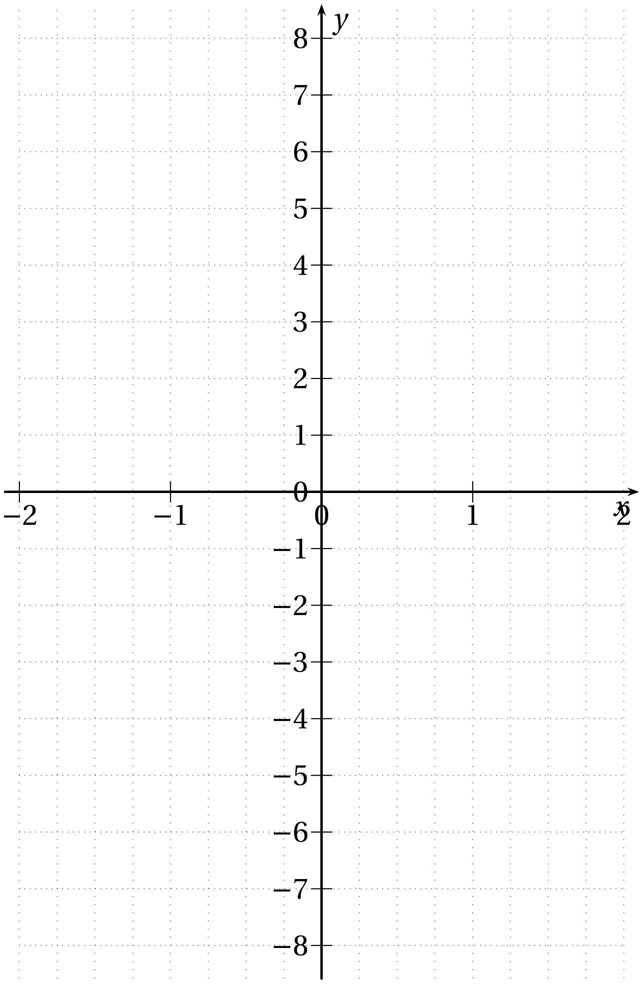
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	↘	0	↗

10.3 Fonction cube

Définition 10.3. La f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$ est appelée *fonction cube.*

ACTIVITÉ 10.3.
Soit f la fonction cube.

1. Montrer que la fonction cube est impaire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonction cube dans le repère ci-contre.
4. Quel semble être le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$?
   Démontrons cette conjecture.
   (a) Montrer que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
   (b) Soit $0 \leqslant a < b$
      i. Quel est le signe de $a - b$?
      ii. Quel est le signe de ab? En déduire le signe de $a^2 + ab + b^2$.
      iii. En déduire le signe de $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ puis celui de $a^3 - b^3$.
      iv. En déduire les variations de $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}^+$.
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^-$.



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x)$									

Propriété 10.5. *Soit f la fonction cube.*

- *La fonction cube est une fonction impaire.*
- *Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*

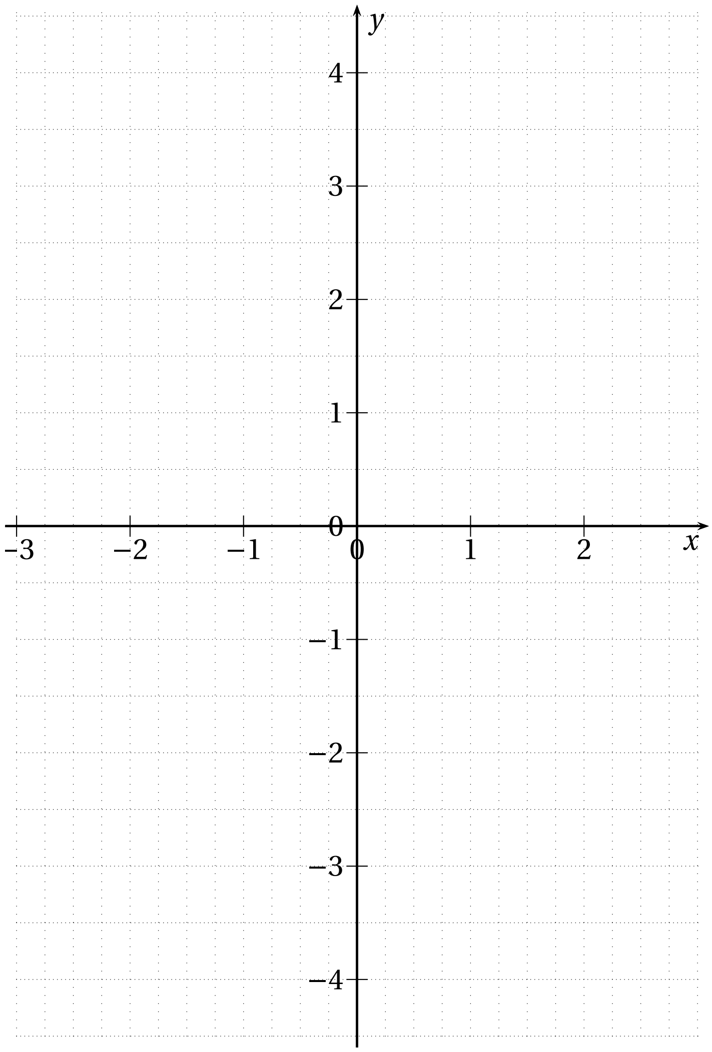
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^3$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

10.4 Fonction inverse

Définition 10.4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est appelée *fonction inverse.*

ACTIVITÉ 10.4.
Soit f la fonction inverse.

1. Montrer que la fonction inverse est impaire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonctioninverse dans le repère ci-contre.
   Ce type de courbe s'appelle une *hyperbole.*
4. Quel semble être le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^{+*} =]0\,;+\infty[$?
   Démontrons cette conjecture.
   (a) Montrer que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.
   (b) Soit $0 < a < b$
      i. Quel est le signe de $b-a$?
      ii. Quel est le signe de ab ?
      iii. En déduire le signe de $\frac{b-a}{ab}$ puis celui de $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.
      iv. En déduire les variations de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty\,;0[$.



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$f(x)$													

Propriété 10.6. *Soit f la fonction inverse.*

- *La fonction inverse est une fonction impaire.*
- *f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

10.5 Fonction racine carrée

Définition 10.5. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée *fonction racine carrée*.

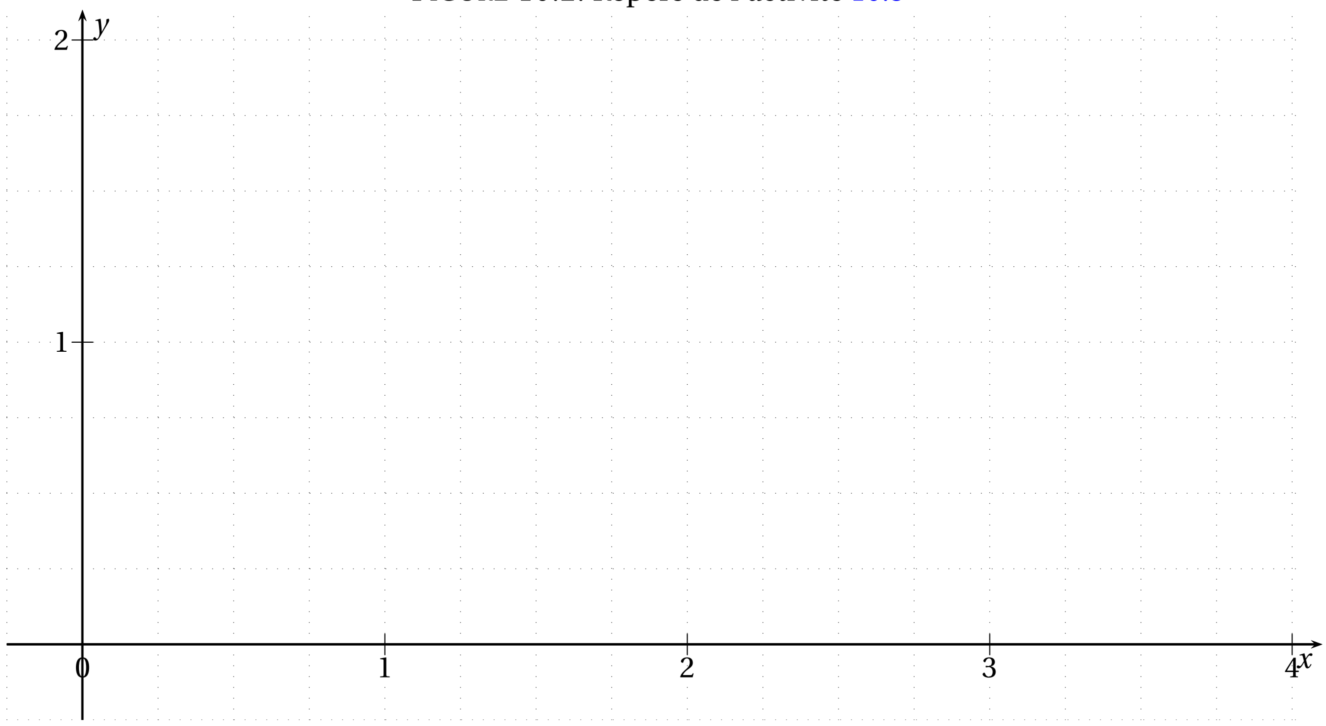
ACTIVITÉ 10.5.
Soit f la fonction racine carrée.

1. La fonction racine carrée est-elle paire ? Impaire ?
2. Compléter le tableau ci-dessous puis tracer la courbe représentative de la fonction racine carrée dans le repère de la figure 10.2 de la présente page.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$													

3. Que peut-on conjecturer quant aux variations de la fonction racine carrée ?
   Prouvons-le.
   Soit $0 \leqslant a < b$.
   (a) Que peut-on dire alors de $b - a$?
   (b) Montrer que $b - a = (\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.
   (c) Que peut-on dire du signe de $\sqrt{b} + \sqrt{a}$? En déduire le signe de $\sqrt{b} - \sqrt{a}$.
   (d) En déduire alors le sens de variation de la fonction racine.

FIGURE 10.2: Repère de l'activité 10.5



Propriété 10.7. *Soit f la fonction racine carrée.*
f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	$0 \qquad +\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	$0 \nearrow$

10.6 Fonction valeur absolue

Définition 10.6. On appelle *valeur absolue* d'un réel x le réel, noté $|x|$, tel que :

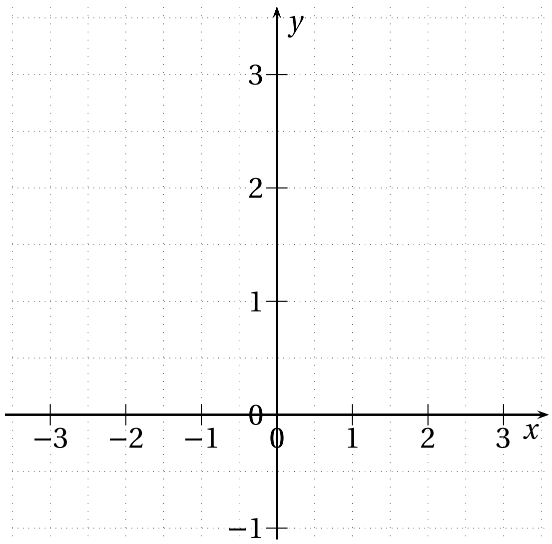
$$\begin{cases} \text{Si } x \geqslant 0 \text{ alors } |x| = x \\ \text{Si } x \leqslant 0 \text{ alors } |x| = -x \end{cases}$$

La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto |x|$.

Par exemple, $|3| = 3$ et $|-7| = 7$.

Activité 10.6.
Soit f la fonction valeur absolue.

1. Montrer que la fonction valeur absolue est paire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonction carrée dans le repère ci-contre.
4. Quel semble être le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$?
   Démontrons cette conjecture.
   Montrer que si $0 \leqslant a < b$ alors $|a| < |b|$. Que peut-on en déduire ?
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^-$.



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$									

Propriété 10.8. *Soit f la fonction valeur absolue.*

- *La fonction valeur absolue est une fonction paire.*
- *Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et admet comme minimum 0.*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \lvert x \rvert$	↘	0	↗

10.7 Exercices et problèmes

10.7.1 Exercices

EXERCICE 10.1.
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto mx + p$. À quelle conditon f est-elle paire ? impaire ?

EXERCICE 10.2.
Voici les tarifs pratiqués par deux agences de location de voitures pour des véhicules identiques (tarifs journaliers, assurance comprise) :

- agence A : Forfait de 50 € plus 0,42 € par km ;
- agence B : Forfait de 40 € plus 0,50 € par km.

1. Quelle est l'agence la plus économique selon que l'on désire faire un parcours de
   - 50 km ?
   - 150 km ?
   - 300 km ?
2. On appelle x la distance que l'on désire parcourir. Déterminer selon les valeurs de x l'agence la plus économique.
3. Écrire un algorithme prenant comme argument la distance à parcourir et indiquant quelle agence est la plus intéressante pour cette distance ainsi que le tarif à payer.

EXERCICE 10.3.
Les tarifs mensuels d'un abonnement pour un téléphone mobile sont les suivants : Forfait d'une heure 15 € plus 0,30 € par minute supplémentaire.

1. Compléter le tableau suivant, où la durée est la durée totale des communications du mois en minute et le coÃ»t est le montant final de la facture en euros :

Durée	45	80	120
CoÃ»t			

2. Existe-t-il une fonction affine f qui à une durée de communication x associe le coÃ»t $f(x)$?

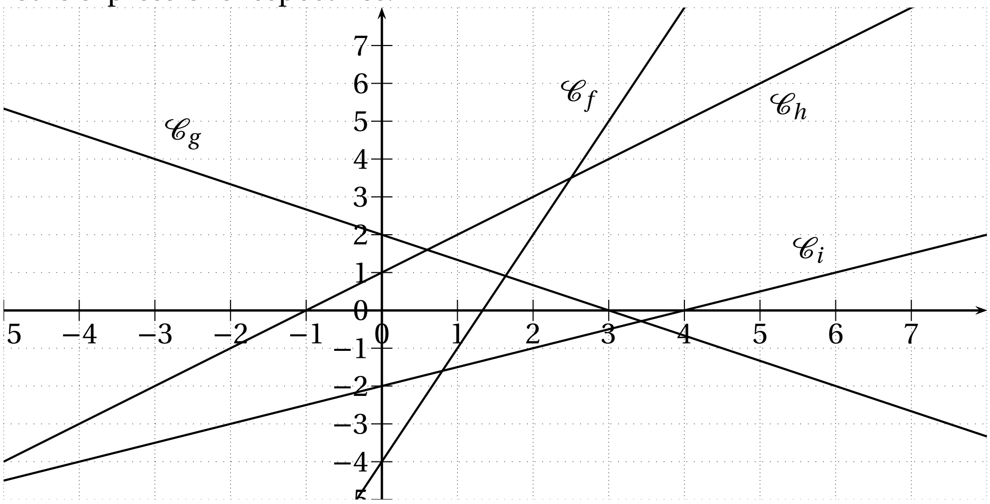
EXERCICE 10.4.
Soit f une fonction affine. Déterminer l'expression de f dans chacun des cas suivants :

1. $f(1) = 2$ et $f(4) = 8$
2. $f(-1) = 4$ et $f(2) = 3$
3. $f(5) = -1$ et $f(3) = 3$
4. $f(-4) = 5$ et $f(1) = 7$

EXERCICE 10.5.
Représenter dans un même repère les courbes des fonctions affines suivantes :

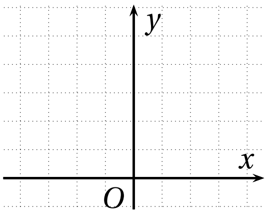
- $f(x) = 2x - 3$;
- $g(x) = 2x + 1$;
- $h(x) = \frac{1}{3}x + 3$;
- $i(x) = -x + 4$;
- $j(x) = -\frac{3}{4}x + 5$;
- $k(x) = -3x + 5$.

EXERCICE 10.6.
Dans le repère ci-dessous on a représenté les courbes de quatre fonctions affines f, g, h et i.
Déterminer leurs expressions respectives.



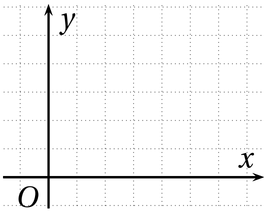
EXERCICE 10.7.
Déterminer graphiquement l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de chacune des inéquations suivantes.
On construira avec soin les représentations graphiques des fonctions de référence concernées et on fera apparaître les traits de constructions.

$2 \leqslant x^2$



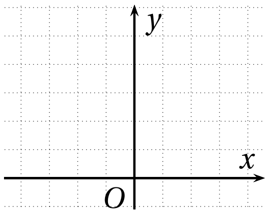
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{x} \geqslant 2$



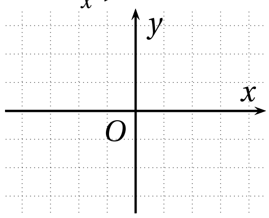
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$|x| > 1$



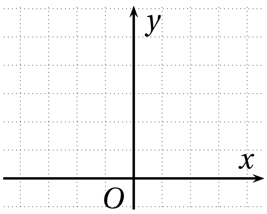
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{x} \geqslant -3$



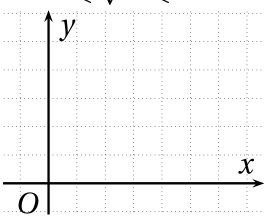
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1 \leqslant x^2 \leqslant 5$



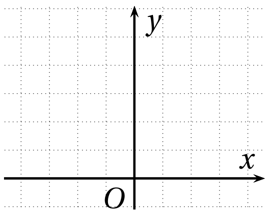
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$3 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 4$



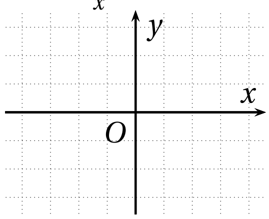
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$4 > |x| > 2$



$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{x} < 2$



$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

EXERCICE 10.8.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carrée ou de son tableau de variation, compléter par ce qu'il est possible de déduire pour x^2 :

1. Si $x > 3$ alors ……………………………
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors ………………………
3. Si $x > 2$ alors ……………………………
4. Si $x < -3$ alors …………………………
5. Si $x < 4$ alors ……………………………
6. Si $x > -10$ alors …………………………
7. Si $x < 1$ alors ……………………………
8. Si $x > -5$ alors …………………………

EXERCICE 10.9.
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $x^2 = 4$;
2. $x^2 = 5$;
3. $x^2 = 0$;
4. $x^2 = -2$;
5. $x^2 < 4$;
6. $x^2 \geqslant 9$;
7. $x^2 > -2$;
8. $x^2 \leqslant -3$;
9. $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
10. $-1 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
11. $0 \leqslant x^2 \leqslant 8$;
12. $4 > x^2 > 1$.

EXERCICE 10.10.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation, compléter :

1. Si $x > 3$ alors $\dots\dots \frac{1}{x} \dots\dots$
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors $\dots \frac{1}{x} \dots$
3. Si $x > 2$ alors $\dots\dots \frac{1}{x} \dots\dots$
4. Si $x < -3$ alors $\dots\dots \frac{1}{x} \dots\dots$
5. Si $x < 4$ alors $\dots\dots \frac{1}{x} \dots\dots$
6. Si $x > -10$ alors $\dots\dots \frac{1}{x} \dots\dots$
7. Si $x < 1$ alors $\dots\dots \frac{1}{x} \dots\dots$
8. Si $x > -5$ alors $\dots\dots \frac{1}{x} \dots\dots$

EXERCICE 10.11.
Calculer $\sqrt{x^2}$ dans les cas suivants :

- $x = 3$
- $x = -3$
- $x = 2$
- $x = -2$

En déduire la valeur de $\sqrt{x^2}$.

10.7.2 Problèmes

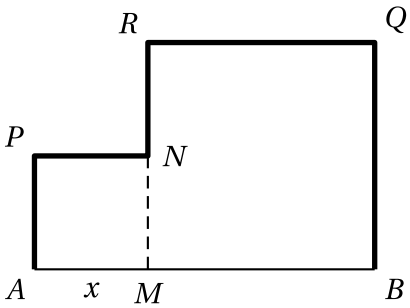
PROBLÈME 10.1.
On donne $P(x) = (2x+1)(-x+2)$.

1. (a) Étudier le signe de $2x+1$ selon les valeurs de x.
   (b) Étudier le signe de $-x+2$ selon les valeurs de x.
   (c) En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs de x. *On pourra étudier le signe de chacun des facteurs et faire un tableau de signes.*
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) < 0$.
2. Étudier le signe, selon les valeurs de x, de chacune des fonctions suivantes :
   - $Q(x) = (-2x+1)(-3x+4)$;
   - $R(x) = (-x+4)(5-2x)$;
   - $T(x) = (x-1)(-2x+4)(2x-1)$.
3. Résoudre les inéquations suivantes :
   - $S(x) \geqslant 0$ sachant que $S(x) = (2x+3)(x-1)$;
   - $U(x) \leqslant 0$ sachant que $U(x) = (4-x)(x+1)(2x+2)$.

PROBLÈME 10.2.
On donne $f(x) = (3x+4)(x-4) - (2x-3)(3x+4)$.
Résoudre $f(x) > 0$.
On pourra commencer par factoriser.

PROBLÈME 10.3.
On donne $AB = 6$ cm. M est un point du segment $[AB]$ et on pose $AM = x$.
Dans le même demi-plan, on construit les carrés $AMNP$ et $MBQR$.
f est la fonction définie sur $[0;6]$ qui à x associe la longueur $f(x)$ de la ligne polygonale $APNRQB$ (tracée en gras sur la figure ci-dessous).
Notez que la figure ci-dessous a été faite dans le cas où x est compris entre 0 et 3.

1. Faites une deuxième figure dans le cas où x est dans l'intervalle $[3;6]$.
2. Vérifiez que $f(x) = 18 - 2x$, si $x \in [0;3]$ et que $f(x) = 6 + 2x$, si $x \in [3;6]$.
3. Dans un repère orthogonal (unités : 1 cm sur les abscisses, 0,5 cm sur les ordonnées), construisez la courbe représentatice de f.
4. Trouvez graphiquement l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 14 et 16 cm.



PROBLÈME 10.4.
Résoudre les inéquations suivantes :
1. $x \leqslant x^2$
2. $\frac{1}{x} \leqslant x$
3. $x^3 \leqslant x^2$

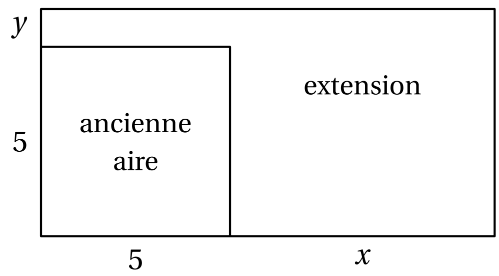
PROBLÈME 10.5.
On donne les fonctions f, g et h suivantes :
- $f : x \mapsto x$;
- $g : x \mapsto x^2$;
- $h : x \mapsto x^3$.

Leurs courbes sont notées, respectivement, $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.
Sur $[O; +\infty[$, étudier les positions relatives :
1. de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$;
2. de $\mathscr{C}_g$ et de $\mathscr{C}_h$;
3. de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_h$.

PROBLÈME 10.6.
Accoudée à son balcon, Morgan laisse échapper son téléphone portable.
La hauteur h par rapport au sol, en mètre, à laquelle le téléphone se situe après t secondes de chute est donnée par la relation : $h(t) = -4{,}90t^2 + 15$.

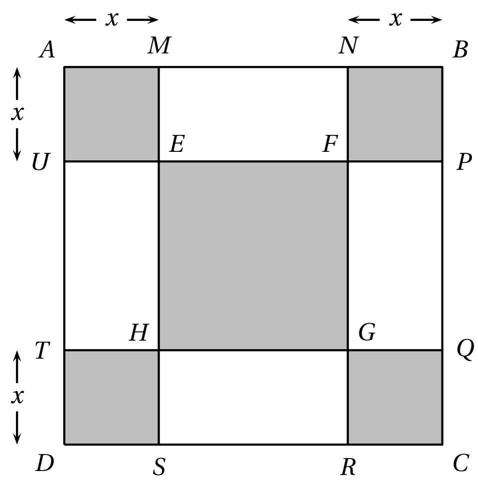
1. De quelle hauteur Morgan lâche-t-il son téléphone ?
2. Au bout de combien de temps passe-t-il au 3e étage situé à une hauteur de 9 mètres ?
3. Combien de temps s'écoule-t-il pour que le téléphone atteigne le sol ?

PROBLÈME 10.7.
La petite station balnéaire de Port-Soleil est de plus en plus fréquentée. Aussi pour satisfaire les vacanciers, le maire a-t-il décidé d'agrandir l'aire de jeu. Actuellement, cette aire a la forme d'un carré de 5 mètres de côté. Le responsable du projet propose d'allonger chacun de ses côtés pour lui donner la forme rectangulaire ci-dessous :



1. Exprimer l'aire de cette nouvelle aire de jeu en fonction de x et y.
2. Les contraintes budgétaires de la commune font que la surface de la nouvelle aire de jeu devra être de 100 mètres carrés.
   Démontrer que $y = \frac{100}{5+x} - 5$.
   Quelle information le maire doit-il donner à l'entrepreneur : x, y ou les deux?
3. On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f : x \mapsto \frac{100}{5+x} - 5$.
   (a) La valeur de y est limitée à 5 mètres par le bord de mer. Quelles sont les valeurs possibles pour x?
   (b) Représenter la fonction f avec la calculatrice sur l'intervalle $[5; 15]$.
   (c) Quelles semblent être les variations de f sur l'intervalle $[5; 15]$?
   (d) Parmi les deux valeurs suivantes de x, laquelle donne à la nouvelle aire de jeu la plus grand périmètre : $x_1 = 5$ m ou $x_2 = 10$ m?

PROBLÈME 10.8.
Sur les côtés d'un carré $ABCD$ de côté 4, on place les points M, N, P, Q, R, S, T et U comme indiqué sur le dessin, où $0 \leqslant x \leqslant 2$. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine grisé.



1. Montrer par un raisonnement géométrique que $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $\mathscr{A}(x) = 4x^2 + (4-2x)^2$ ou $\mathscr{A}(x) = 16 - 4x(4-2x)$.

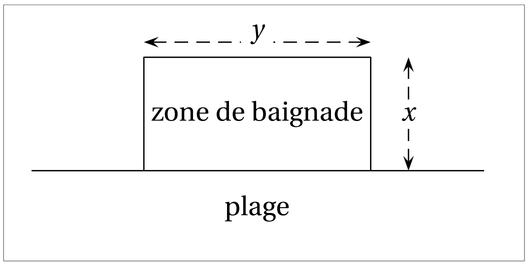
2. Montrer que l'on a aussi : $\mathscr{A}(x) = 8x^2 - 16x + 16$.

3. En utilisant la forme la plus adaptée, calculer $\mathscr{A}(2)$ puis $\mathscr{A}(\sqrt{3})$.

4. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = 8(x-1)^2 + 8$.
   (b) En déduire que l'aire $\mathscr{A}(x)$ est minimale pour $x = 1$.

5. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = (2x-1)(4x-6) + 10$.
   (b) En utilisant l'expression précédente de $\mathscr{A}(x)$, déterminer les valeurs de x telles que l'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale à 10.

Problème 10.9.
Les maîtres nageurs d'une plage disposent d'un cordon flottant d'une longueur de 400 m avec lequel ils délimitent la zone de baignade surveillée, de forme rectangulaire.
Le problème est de déterminer les dimensions de ce rectangle pour que l'aire de baignade soit maximale.
On appelle x la largeur du rectangle et y sa longueur.



1. Expression de l'aire de la zone de baignade
   (a) Calculer l'aide de la zone de baignade lorsque $x = 50$ m et lorsque $x = 100$ m.
   (b) Quelles sont les valeurs posibles pour x ?
   (c) Sachant que la longueur du cordon est de 400 m, exprimer y en fonction de x.
   (d) Exprimer, en fonction de x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la zone de baignade. Sur quel intervalle cette fonction est-elle définie ?

2. Recherche graphique de l'aire maximale.
   (a) Représenter dans un repère aux unités bien choisies la courbe de $\mathscr{A}$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire semble-t-elle maximale ?

3. Recherche par le calcul de l'aire maximale.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0;400]$, $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   $$\mathscr{A}(x) = 20000 - 2(x-100)^2$$
   (b) Peut-on obtenir une aire de 22 000 m^2 ? Justifier.
   (c) Quelle est l'aire maximale qu'on peut obtenir ? Quelles sont alors les dimensions du rectangle ?

PROBLÈME 10.10.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto -x^3 + 4x$ et $g(x) = -x^2 + 4$. On a tracé sur le graphique 10.3 de la présente page les courbes représentatives de f et de g.

1. Associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente. Justifier succintement.
2. Déterminer graphiquement le nombre de solution des équations :
   - $f(x) = 0$;
   - $g(x) = 0$;
   - $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre par le calcul : $f : (x) = 0$ et $g(x) = 0$
4. Résoudre graphiquement : $f(x) \leqslant g(x)$.
5. Un logiciel de calcul formel affiche les choses suivantes :

```
(%i1) factor(-x^3+x^2+4*x-4);
(%o1)        - (x - 2) (x - 1) (x + 2)
```

   (a) Interpréter ces deux lignes.
   (b) En déduire une résolution algébrique de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

FIGURE 10.3: Graphique de l'exercice 10.10