Chapitre 8

Lois de probabilités continues

Sommaire

8.1 Rappels et compléments sur les variables aléatoires et sur les primitives

8.1.1 Rappels

Variable aléatoire discrète

Définition. Soit une expérience aléatoire dont l'univers des issues est un ensemble Ω fini. Une *variable aléatoire*, dite *discrète*, est une **fonction** qui à chaque élément de Ω associe un réel k.

Définition. Soit X une variable aléatoire discrète dont les valeurs sont dans l'ensemble $\Omega_X = \{k_1\,;\,k_2\,;\,\dots\,;\,k_n\}$, un ensemble fini de valeurs.
L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X, dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$, sont respectivement les nombres :

$$E(X) = p(X = k_1) \times k_1 + p(X = k_2) \times k_2 + \dots + p(X = k_n) \times k_n$$

$$\begin{aligned} V(X) &= p(X = k_1) \times (k_1 - E(X))^2 + p(X = k_2) \times (k_2 - E(X))^2 + \dots + p(X = k_n) \times (k_n - E(X))^2 \\ &= \left[p(X = k_1) \times k_1^2 + p(X = k_2) \times k_2^2 + \dots + p(X = k_n) \times k_n^2\right] - (E(X))^2 \\ &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$$

Si on note ω_i les différentes modalités de X et p_i leurs probabilités respectives, les formules deviennent :

$$E(X) = \sum_i p_i\omega_i \quad \text{et} \quad V(X) = \left(\sum_i p_i\omega_i^2\right) - (E(X))^2$$

Loi binomiale

Définition. Une *épreuve de* Bernoulli est une expérience aléatoire pour laquelle il n'y a que deux issues, nommées, en général, « succès » et « échec » et notées, en général, S et $\overline{S}$. On note p la probabilité du succès.
Quand une même épreuve de Bernoulli est répétée plusieurs fois de manière indépendante, on dit qu'on est en présence d'un *schéma de* Bernoulli. On note n le nombre de fois que l'épreuve de Bernoulli est répétée.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque issue d'un schéma de Bernoulli associe le nombre de succès qu'elle comporte. On appelle *loi binomiale* la loi de probabilité de X. On la note $\mathscr{B}(n,p)$.

Propriété. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Alors :*

- $p(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$
- *L'espérance de X est $E(X) = np$*
- *La variance de X est $V(X) = np(1-p)$*
- *L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$*

Primitive s'annulant en a

Théorème. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$. Alors la fonction F définie sur $[a\,;\,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$, a pour dérivée f et est donc, par définition, la primitive de f qui s'annule en a.*

8.1.2 Compléments

Espérance, variance et écart-type de $aX+b$

Propriété 8.1. *Soit X une variable aléatoire, a et b deux réels.*
- $E(aX+b)=aE(X)+b$;
- $V(aX+b)=a^2V(X)$;
- $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$.

EXERCICE 8.1.
Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ tous deux strictement positifs et $Y=aX+b$ d'espérance $E(Y)$ et d'écart-type $\sigma(Y)$.

1. Que peut-on dire de $E(Y)$ et $\sigma(Y)$ si $a=1$?
2. Que peut-on dire de $E(Y)$ et $\sigma(Y)$ si $b=0$?
3. Déterminer les valeurs de a et de b pour que $E(Y)=0$ et $\sigma(Y)=1$.

Propriété 8.2. *Soit X une variable aléatoire, d'espérance μ et d'écart-type $\sigma\neq 0$. Alors la variable aléatoire $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ est d'espérance 0 et d'écart-type 1.*

Linéarité de l'espérance

Propriété 8.3. *Soit X et Y deux variables aléatoires liées à une même situation, et a et b deux réels.*
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;
- $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$;
- *et plus généralement* $E(aX+by)=aE(X)+bE(Y)$

On *n*'a l'équivalent pour les variances *que* lorsque les variables X et Y sont indépendantes.

8.2 Activités d'introduction

8.2.1 Introduction de la fonction de densité

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de six kilomètres d'un éco-point (site pour déposer bouteille de verre, papier recyclable, etc.).

1. Un relevé statistique a permis d'établir l'histogramme des fréquences de la figure 8.1, page suivante.

   Ainsi, la fréquence de la population habitant entre 0 et 1 km d'un éco-point est de 0,51 ou, dit autrement, 51 % de la population habite entre 0 et 1 km d'un éco-point.

   (a) Quel est le pourcentage d'habitants résidant à moins de 3 km d'un éco-point ?

   (b) Que vaut la somme des aires des rectangles de l'histogramme ?

2. On suppose que la population est très grande et on choisit un habitant au hasard.
   On crée la variable aléatoire X qui à chacun des évènements élémentaires de cette expérience aléatoire, donc à chaque personne, associe la distance séparant la résidence de cette personne de l'éco-point le plus proche.
   X prend donc ses valeurs dans l'intervalle $[0;6[$, et on peut considérer qu'il y a une infinité de possibilités.
   On dit alors que la variable aléatoire X est *continue* (par opposition à *discrète*).

   On veut définir certaines caractéristiques de la loi de probabilité de X.

FIGURE 8.1: Premier histogramme

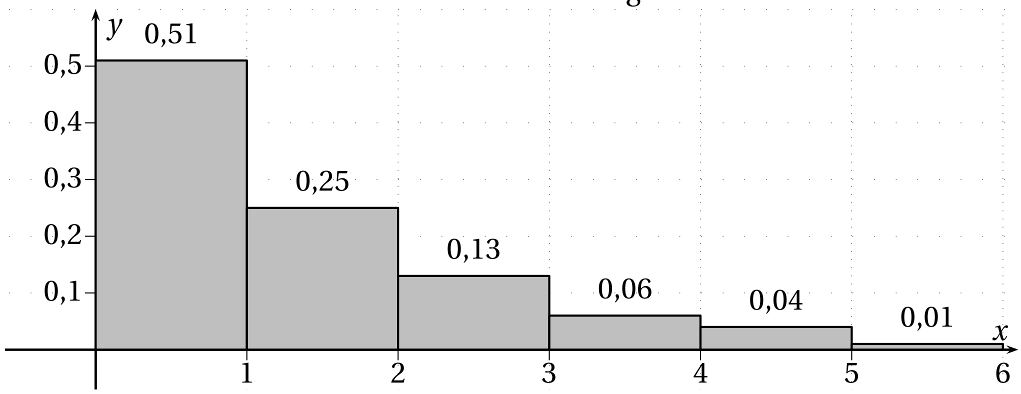


FIGURE 8.2: Second histogramme

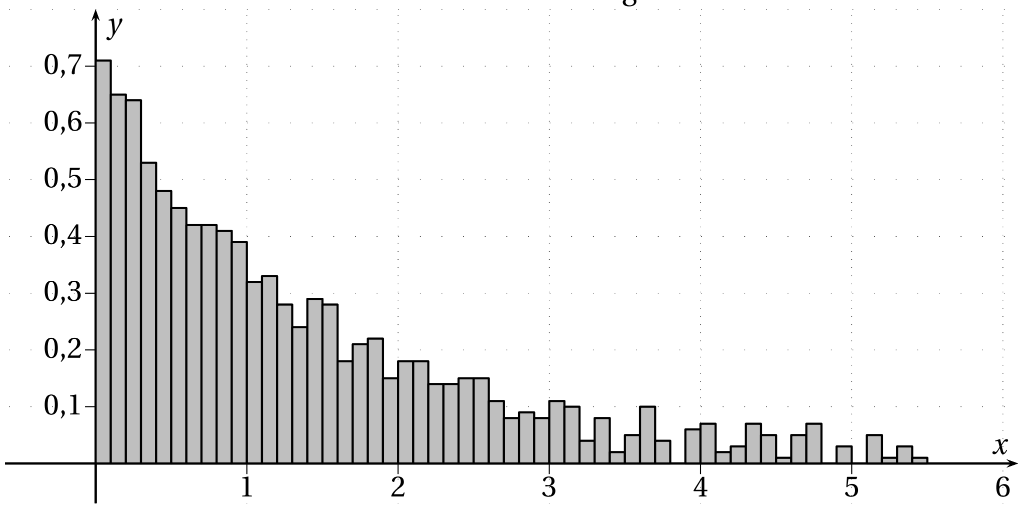
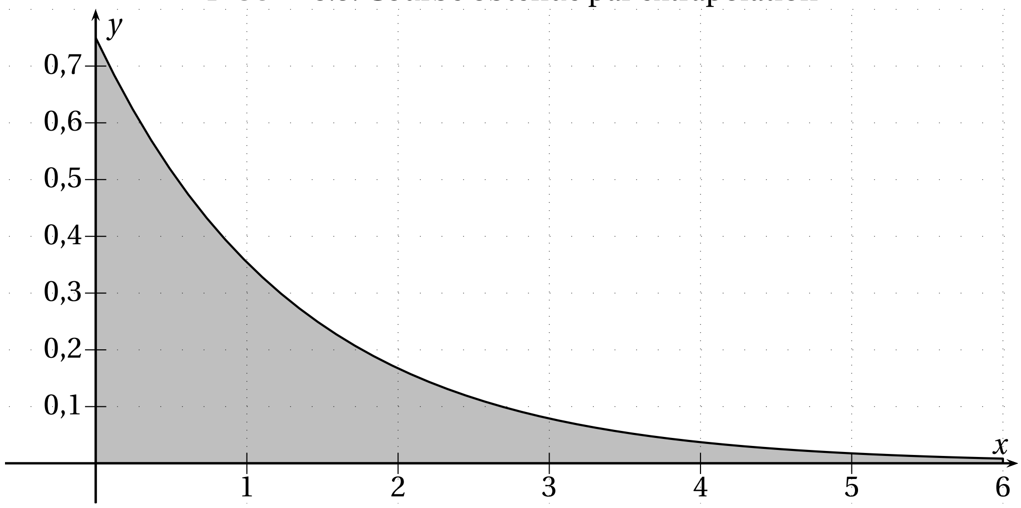


FIGURE 8.3: Courbe obtenue par extrapolation



(a) Compléter :
- $p(0 \leqslant X < 1) = \ldots\ldots\ldots$
- $p(2 \leqslant X < 3) = \ldots\ldots\ldots$
- $p(4 \leqslant X < 5) = \ldots\ldots\ldots$
- $p(1 \leqslant X < 2) = \ldots\ldots\ldots$
- $p(3 \leqslant X < 4) = \ldots\ldots\ldots$
- $p(5 \leqslant X < 6) = \ldots\ldots\ldots$

(b) Pour tout entier n (en particulier ceux compris entre 1 et 6) que représente la somme des aires des rectangles situés à gauche de n sur l'axe des abscisses ?

(c) Pour tout entier n (en particulier ceux compris entre 0 et 5), que représente la somme des aires des rectangles situés à droite de n sur l'axe des abscisses ?

3. Une étude plus précise a permis de relever les distances à 0,1 km près et de construire l'histogramme de la figure 8.2, page ci-contre, où chacun des 60 rectangles a pour base 0,1 et pour **aire** la fréquence de la classe correspondante.

(a) Le 1^er rectangle a une hauteur de 0,71. Quel pourcentage de la population réside à moins de 0,1 km de l'éco-point ?

(b) Que vaut la somme des aires de tous les rectangles ?

(c) On donne dans la table 8.1 de la présente page un extrait des relevés ayant permis d'élaborer cet histogramme.

TABLE 8.1: Extrait des relevés

Distance	[0; 0,1[	[0,1; 0,2[	[0,2; 0,3[	[0,3; 0,4[	[0,4; 0,5[	[0,5; 0,6[	[0,6; 0,7[	[0,7; 0,8[	[0,8; 0,9[	[0,9; 1,0[
Fréquence (en %)	7,1	6,5	6,4	5,3	4,8	4,5	4,2	4,2	4,1	3,9

À l'aide de cet extrait, déterminer les probabilités suivantes :
- $p(0{,}5 \leqslant X < 0{,}8)$
- $p(X < 0{,}5)$
- $p(X \geqslant 0{,}8)$

(d) Comment pourrait-on obtenir ces mêmes résultats uniquement à partir de l'histogramme ?

(e) Plus généralement, soient a et b deux nombres d'au plus une décimale tels que $0 \leqslant a < b < 6$. Comment pourrait-on obtenir à l'aide des aires des rectangles :
- $p(a \leqslant X < b)$?
- $p(X < a)$?
- $p(X \geqslant b)$?

4. Si on extrapole à partir des relevés, on voit apparaître une courbe comme sur la figure 8.3, page ci-contre.

Cette courbe représente une fonction f définie sur $[0;6[$ et est appelée *densité de probabilité* de la loi de X.

(a) Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle $[0;6[$ avec $a < b$. En vous inspirant de ce qui a été fait précédemment, comment pourrait-on obtenir les probabilités suivantes :
- $p(a \leqslant X < b)$?
- $p(X < a)$?
- $p(X \geqslant b)$?

(b) Que peut-on dire de l'aire sous la courbe de f entre 0 et 6 ?

(c) On suppose qu'ici $f(x) \approx 0{,}75\mathrm{e}^{-0{,}75x}$.

i. Déterminer une primitive F de f.

ii. Calculer :
- $p(1{,}23 \leqslant X < 3{,}67)$
- $p(X < 1{,}23)$
- $p(X \geqslant 3{,}67)$

iii. Vérifier que $p(0 \leqslant X < 6)$ est proche de 1.

iv. Conjecturer la valeur de $p(X = 3)$ et, plus généralement, la valeur de $p(X = t)$ pour tout nombre $t \in [0;6[$. Que peut-on en déduire pour $p(X < t)$ et $p(X \leqslant t)$?

8.2.2 Introduction à la loi uniforme

On se propose d'étudier les tirages de nombres au hasard dans $[0\,;1]$.

Partie A : Du discret ...

L'intervalle $[0\,;1[$ contient 10 nombres ayant au plus 1 décimale : 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 et 0,9. Si on choisit au hasard un nombre comportant au plus 1 décimale dans l'intervalle $[0\,;1[$, alors chaque nombre a une probabilité de $\frac{1}{10}$ d'être choisi.

1. Combien l'intervalle $[0\,;1[$ contient-il de nombres ayant au plus 2 décimales ? Si on choisit au hasard un nombre comportant au plus 2 décimales dans l'intervalle $[0\,;1[$, quelle est alors la probabilité de chacun d'entre eux d'être choisi.
2. À l'aide de La fonction *Rand* ou *NbrAléat* de la calculatrice, on peut obtenir un nombre décimal d'au plus 10 décimales. Quelle est la probabilité que ce nombre soit 0,5221311499 ?

Partie B : ... au continu.

L'intervalle $[0\,;1]$ contient une infinité de nombre réels.
La variable aléatoire X correspondant au tirage au hasard d'un nombre réel de $[0\,;1]$ est continue.

1. Conjecturer les valeurs de :
   - $p\left(X=\frac{1}{3}\right)$
   - $p\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right)$
2. Plus généralement, soit $a \in [0\,;1]$, que peut-on conjecturer pour $p\,(0 \leqslant X \leqslant a)$?
3. Soit f la fonction de densité de probabilité de la loi de X.
   (a) A priori, n'importe quel nombre à la même probabilité d'être choisi.
   Justifier que la fonction de densité f est une constante.
   (b) On note $f(x) = k$ et on cherche à déterminer cette valeur pour que f soit bien une fonction de densité.
      i. Déterminer une primitive F de f.
      ii. Déterminer en fonction de k de a et de b la valeur $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
      iii. Que peut-on dire de $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$?
      En déduire la seule valeur possible pour k.

Partie C : Un autre exemple.

Pour tout achat, le gérant d'un magasin donne un jeton à insérer dans un distributeur d'eau de bleuet pour la peau.
Un jeton permet d'obtenir, de façon uniforme, entre 2 mL et 6 mL d'eau de bleuet.

On définit ainsi une variable aléatoire X, désignant le volume d'eau de bleuet (en mL) obtenu par un client ayant effectué un achat.

Déterminer la valeur de la fonction de densité f dans ce cas en vous inspirant de la façon de procéder dans la partie précédente.

8.3 Loi à densité

Définition 8.1. On appelle *fonction de densité* sur un intervalle $[a\,;\,b]$ une fonction f telle que :

- f est continue et positive sur $[a\,;\,b]$;
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$

Remarques.

- Rigoureusement, f n'a pas besoin d'être continue ; il suffit qu'on puisse calculer son aire sous la courbe. Cependant, en Terminale ES ou L, nous nous limiterons aux fonctions continues.
- Une autre façon de voir les choses est de considérer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle est nulle en dehors de l'intervalle $[a\,;\,b]$.
- L'intervalle $[a\,;\,b]$ peut aussi être un intervalle non borné comme par exemple $[a\,;\,+\infty[$, voire $]-\infty\,;\,+\infty[$.

Définition 8.2. Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $[a\,;\,b]$, et f une fonction de densité sur $[a\,;\,b]$. On dit que p est la *loi de probabilité de densité f* lorsque, pour tout intervalle $[c\,;\,d]$ inclus dans $[a\,;\,b]$, $p(c \leqslant X \leqslant d)$ est l'aire sous la courbe représentative de f entre c et d.

$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$$

Remarque. Pour tout $k \in [a\,;\,b]$:

- $p(X \leqslant k) = p(a \leqslant X \leqslant k)$
- $p(k \leqslant X) = p(k \leqslant X \leqslant b)$

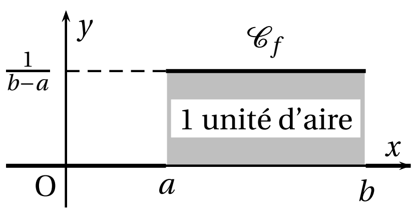
Définition 8.3. Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $[a\,;\,b]$, munie d'une fonction de densité f sur $[a\,;\,b]$. On appelle *espérance mathématique de X* le nombre $E(X)$ tel que :

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x$$

8.4 Loi uniforme

Définition 8.4. Une variable aléatoire continue X suit *la loi uniforme* sur $[a\,;\,b]$ si elle admet comme densité de probabilité la fonction f, telle que :

- si $x \in [a\,;\,b]$ alors $f(x) = \frac{1}{b-a}$
- si $x \notin [a\,;\,b]$ alors $f(x) = 0$

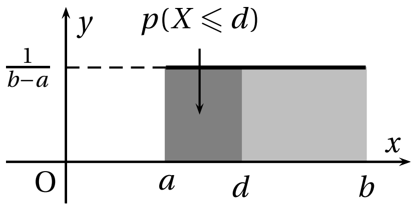


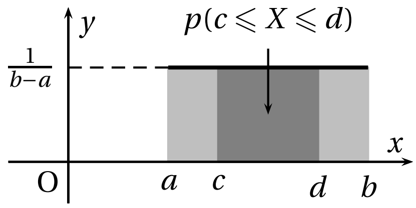
Propriété 8.4. *Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$. Alors, si $[c\,;\,d] \subset [a\,;\,b]$,*

$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Remarques.

- $p(X \leqslant d) = p(a \leqslant X \leqslant d) = p(c \leqslant X \leqslant d)$ si $c \leqslant a \leqslant d \leqslant b$
- $p(X \geqslant c) = p(c \leqslant X \leqslant b) = p(c \leqslant X \leqslant d)$ si $a \leqslant c \leqslant b \leqslant d$
- $p(c \leqslant X \leqslant d) = p(a \leqslant X \leqslant b) = 1$ si $c \leqslant a \leqslant b \leqslant d$





Propriété 8.5. *Soit X la variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.*

- *L'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$;*
- *La variance de X est $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$;*
- *L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$.*

Remarque. On simule un résultat d'une loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;\,b]$:

- avec le tableur par l'instruction $\boxed{\textbf{=a+ALEA()*(b-a)}}$;
- avec la calculatrice par l'instruction :
  - TI : **a+RAND**×**(b-a)** (RAND : dans le menu **MATH** puis **PRB**)
  - Casio : **a+RAN#**×**(b-a)** (RAN# : dans le menu **OPTN** puis **PRB**)

Exemple 8.1. En reprenant la situation de l'exemple de la partie C du paragraphe 8.2.2 :

1. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat.
2. Calculer la variance et l'écart-type de X.

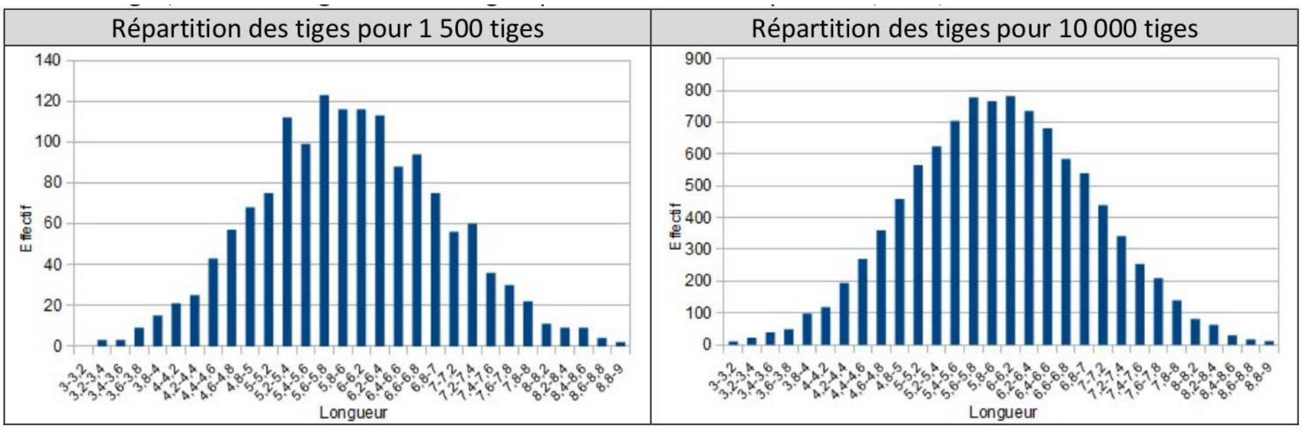
8.5 Loi normale

8.5.1 Une présentation de la loi normale

Une artiste réalise une œuvre à l'aide de tiges métalliques. À partir d'un grand nombre de morceaux mesurant, de manière aléatoire, de 0 à 1 dm, elle soude bout à bout 12 morceaux pour obtenir une tige. Une tige mesure donc de 0 à 12 dm.
L'artiste désire utiliser 1 500 ou 10 000 tiges et, pour cela, elle simule leur longueur sur tableur dans la feuille de calcul suivante :

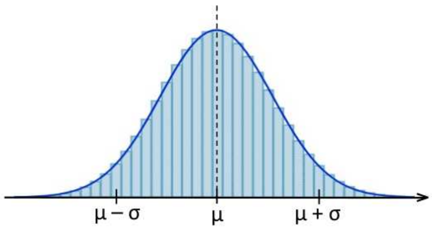
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Morceau 1	Morceau 2	Morceau 3	Morceau 4	Morceau 5	Morceau 6	Morceau 7	Morceau 8	Morceau 9	Morceau 10	Morceau 11	Morceau 12	Longueur
2	Tige 1	0,35401274	0,56704262	0,78222074	0,73482199	0,05628004	0,2538151	0,09822488	0,16579375	0,87926618	0,07442848	0,94428594	0,21355885	5,123751305
3	Tige 2	0,38995414	0,52517484	0,29960158	0,52744657	0,1609047	0,68898174	0,91022953	0,99837091	0,79828172	0,16229686	0,93467707	0,53255417	6,928473823
4	Tige 3	0,39578119	0,92022374	0,13902656	0,69806021	0,66946694	0,74687129	0,48343753	0,27521792	0,13397536	0,16628122	0,48684654	0,39668185	5,511870353
5	Tige 4	0,43636346	0,13651107	0,59355023	0,0640642	0,47112342	0,54111586	0,48973778	0,14451482	0,38034378	0,18560903	0,51150525	0,00358489	3,958023791
6	Tige 5	0,78633928	0,58525121	0,46531159	0,23642503	0,81457667	0,03212376	0,6084712	0,54981915	0,75453102	0,29803266	0,51168576	0,53513197	6,177699294
7	Tige 6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

La répartition des tiges, dont les longueurs sont regroupées en classe d'amplitude 0,2 dm, est donnée ci-dessous :



La distribution des effectifs montre une symétrie autour d'une valeur centrale $\mu = 6$ dm, et plus on s'écarte de la valeur centrale, plus les effectifs sont faibles.
On obtient la même configuration avec la distribution des fréquences.
On peut calculer l'écart-type σ de cette série statistique.

Plus on réalise un grand nombre de simulations, ou bien plus on réduit la largeur des classes, plus les sommets des bâtons vont épouser une courbe « en cloche », appelée aussi courbe de GAUSS.
Cette courbe de GAUSS est la représentation graphique de la densité de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi de probabilité appelée « loi normale ».



On retrouve la loi normale dans un très grand nombre de distributions dans la nature, dans l'industrie, en économie, en médecine ou dans les sciences sociales car beaucoup de phénomènes naturels, industriels, économiques, physiologiques ou sociaux résultent d'un grand nombre de causes de fluctuations indépendantes.
Ce résultat s'explique mathématiquement par le théorème suivant, qui n'est pas exigible en terminale ES ou L et qu'on admettra, mais qui explique l'intérêt porté à la loi normale :

Théorème. *Lorsque l'on fait la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires indépendantes de lois quelconques, cette somme suit une loi normale.*

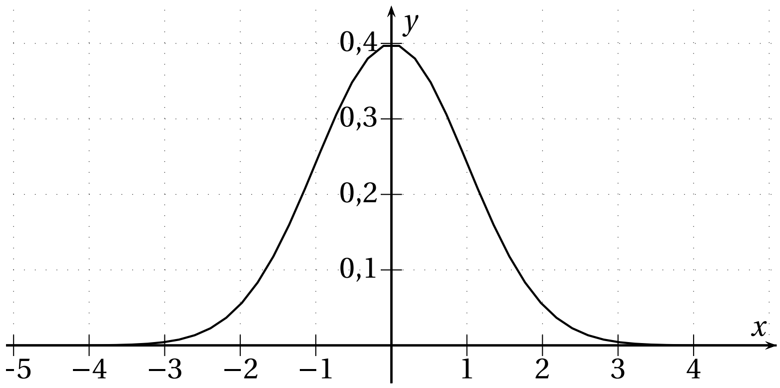
C'est le cas de la taille ou du poids d'un individu en fonction de son âge dans les premières années de sa vie qu'on retrouve dans les carnets de santé, par exemple.

8.5.2 Loi normale centrée réduite

Définition 8.5. On dit qu'une variable aléatoire continue suit *la loi normale centrée réduite* d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0$, notée $\mathcal{N}\left(0;1^2\right) = \mathcal{N}(0;1)$ lorsqu'elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

On admettra que son espérance est bien 0 et son écart-type 1 et que la fonction f est bien une fonction de densité.



Remarques.

- Cette fonction est aussi appelée *densité de probabilité de* LAPLACE-GAUSS.
- Sa courbe est parfois appelée *courbe de* GAUSS.

- La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu = 0$.
- Dans la notation $\mathcal{N}(a;b)$, a est toujours l'espérance de la loi normale et b est la variance, c'est-à-dire l'écart-type au carré.

8.5.3 Loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ

Définition 8.6. Soit X une variable aléatoire continue. On dit que X suit la loi normale de paramètres μ et σ, notée $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Propriété 8.6. *Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Alors :*
- $E(X) = \mu$;
- $V(X) = \sigma^2$;
- $\sigma(X) = \sigma$.

Les preuves seront faites en classe.
La fonction de densité de $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ présente quelques caractéristiques bien utiles :

- Elle est positive et continue et l'aire sous sa courbe pour x variant de $-\infty$ et $+\infty$ est égale à 1 (admis).
- Sa courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

On peut en déduire les propriétés suivantes :

Propriété 8.7. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ et a et b deux réels. Alors :*
- $p(X \in \mathbb{R}) = 1$;
- $p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a)$;
- $p(X \leqslant \mu) = p(X \geqslant \mu) = 0{,}5$;
- $p(X \leqslant \mu - a) = p(X \geqslant \mu + a)$;
- $p(a \leqslant X \leqslant b) = p(X \leqslant b) - p(X \leqslant a)$.

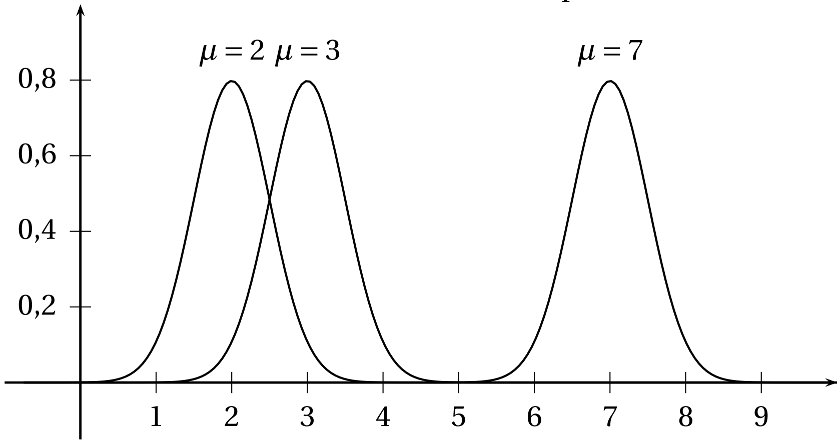
Ces résultats seront prouvés ou illustrés en classe.
Il est conseillé d'être capable de les retrouver graphiquement plutôt que de les apprendre.
Pour d'autres calculs, on pourra au besoin utiliser les résultats suivants :

Propriété 8.8. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ et a et b deux réels.*

- *Si $a \geqslant \mu$:*
  - $p(X \leqslant a) = p(X \leqslant \mu) + p(\mu \leqslant X \leqslant a) = 0{,}5 + p(\mu \leqslant X \leqslant a)$;
  - $p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a) = 0{,}5 - p(\mu \leqslant X \leqslant a)$.
- *Si $a \leqslant \mu$:*
  - $p(X \leqslant a) = 0{,}5 - p(a \leqslant X \leqslant \mu)$;
  - $p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a) = 0{,}5 + p(a \leqslant X \leqslant \mu)$.

Ces résultats seront prouvés ou illustrés en classe.
Là encore, il est conseillé d'être capable de les retrouver graphiquement plutôt que de les apprendre.

FIGURE 8.4: Loi normale et espérance



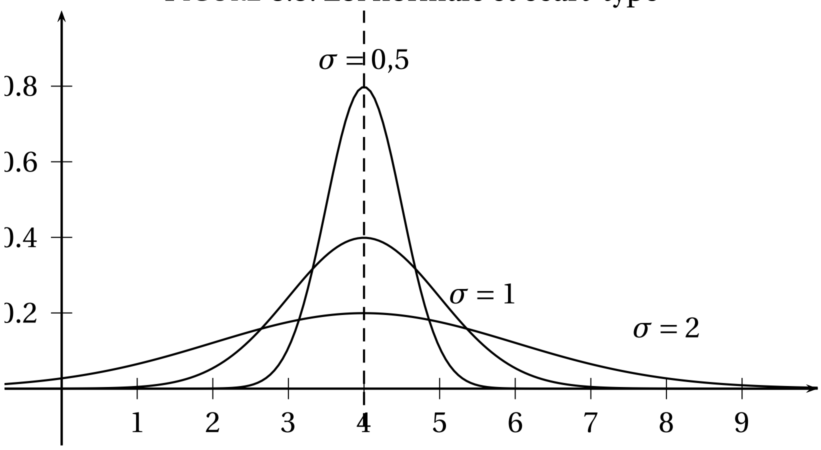
Loi normale et espérance

On présente sur la figure 8.4 de la présente page trois courbes de fonctions de densité de probabilité correspondant à trois lois normales d'espérances respectives 2, 3 et 7 et d'écart-type 0,5.
On constate qu'à une translation de vecteur $k\vec{\imath}$ près, les courbes sont identiques.

Loi normale et écart-type

On présente sur la figure 8.5 de la présente page trois courbes de fonctions de densité de probabilité correspondant à trois lois normales d'espérance 4 et d'écarts-types respectifs 0,5, 1 et 2.

FIGURE 8.5: Loi normale et écart-type



On constate que plus l'écart-type est important et plus la courbe de la fonction de densité est « évasée » et plus le maximum est petit. En effet, un écart-type important signifie que la dispersion des données est importante.
On notera que, dans tous les cas, l'aire sous la courbe de la fonction de densité de probabilité (pour x variant de $-\infty$ à $+\infty$) est égale à 1.

Un, deux ou trois σ

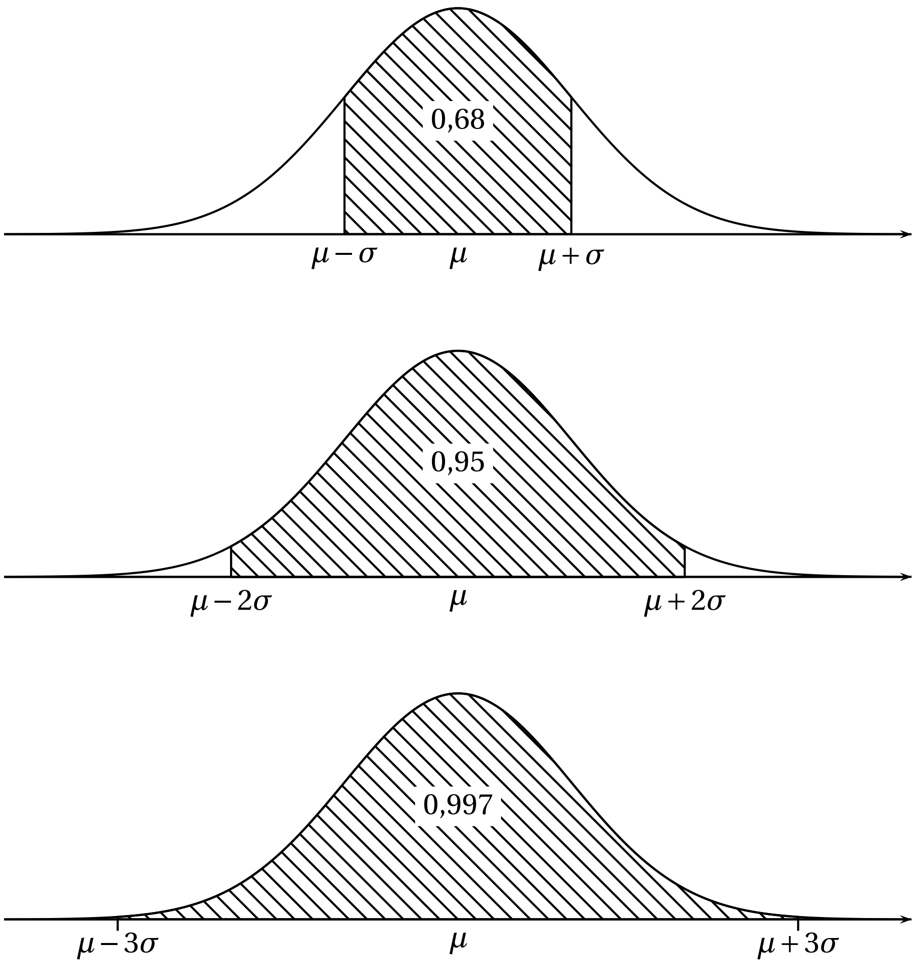
Certaines valeurs dépendant de σ sont à retenir *(par cœur)* :

Propriété 8.9. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\sigma^2\right)$*

- $p(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}68$;
- $p(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}95$;
- $p(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$.

Cette propriété est illustrée par la figure 8.6 de la présente page.

FIGURE 8.6: Un, deux, trois sigmas



Exemple 8.2. Reprenons la situation de l'exemple d'introduction du paragraphe 8.5.1
Déterminer, sans utiliser la calculatrice, la probabilité que la longueur de la tige soit comprise entre 4 et 8 dm.

8.5.4 Loi normale et calculatrice

Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.
La fonction de densité de cette loi normale (qu'elle soit centrée ou non, réduite ou non) n'a pas de primitive explicite mais les calculatrices disposent de commandes spécifiques pour calculer, μ et σ étant connus :

- $p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$;
- x tel que $p(X \leqslant x) = a$, a étant connu.

Ces commandes sont résumées dans le tableau 8.2 de la présente page.

TABLE 8.2: Commandes spécifiques des calculatrices concernant la loi normale

	TI	Casio
$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$	DISTR puis 2 : normalFRep(α,β,μ,σ)	Menu Stat Dist Norm NCD puis renseigner Lower = α ; Upper = β ; σ ; μ
x tel que $p(X \leqslant x) = a$	DISTR puis 3 : FracNormale(a,μ,σ)	Menu Stat Dist Norm InvN puis renseigner Area = a ; σ ; μ

Exemple 8.3. Reprenons la situation de l'exemple d'introduction du paragraphe 8.5.1
La variable aléatoire X, associée à la longueur d'une tige, suit la loi normale d'espérance $\mu = 6$ dm et d'écart-type $\sigma = 1$ dm.

1. Déterminer la probabilité $p(X = 10)$.
2. Déterminer, avec la calculatrice, $p(5{,}7 \leqslant X \leqslant 8{,}3)$ et $p(X > 5)$.
3. Déterminer, avec la calculatrice, la probabilité de l'évènement A : « Avoir une tige de longueur inférieure à 8 dm ».

8.5.5 Revenir à la loi normale centrée réduite

Si jamais μ ou σ ne sont pas connus, on pourra repasser par la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ qui suit la loi normale centrée réduite donc d'espérance et d'écart-type connus puisqu'alors $\mu_Y = 0$ et $\sigma_Y = 1$ ce qui pourra parfois permettre de retrouver l'espérance et l'écart-type de X.
On utilise alors la propriété suivante :

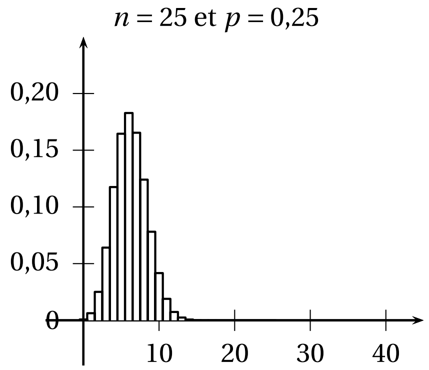
Propriété 8.10. *Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Alors :*

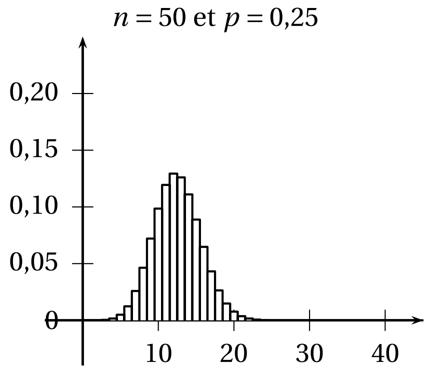
- $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$
- $p(a \leqslant X \leqslant b) = p\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant Y \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

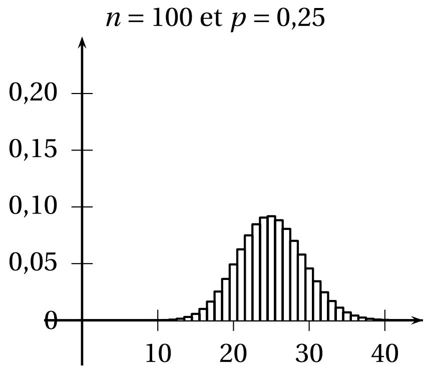
8.6 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

8.6.1 Un exemple

On lance n fois de suite un dé à quatre faces bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où on obtient la face 3.
Les n lancers successifs se font dans des conditions identiques et indépendantes et la probabilité d'un succès est égale à 0,25.
C'est pourquoi, X suit la loi binomiale de paramètres n (variable) et $p = 0{,}25$.Ci-dessous, on représente l'histogramme d'une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}25$.
On fait varier n, qui prend des valeurs de plus en plus grandes.







On observe que lorsque n devient grand, l'histogramme tend vers une courbe de GAUSS.
On admettra qu'une loi binomiale peut être approchée, lorsque n devient grand, par une loi normale.

8.6.2 Bilan et compléments

Propriété 8.11. *L'histogramme d'une loi binomiale de paramètres n et p peut être approché par une courbe de* GAUSS*, lorsque n est assez grand et p n'est pas trop proche de 0 ni de 1. Si ces conditions sont remplies,* ***une loi binomiale*** $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ ***est approchée par une loi normale*** $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.
Dans le cadre de cette approximation :

- *l'espérance μ de la loi normale est égale à l'espérance de la loi binomiale qu'elle approche, soit $\mu = np$.*
- *l'écart-type σ de la loi normale est égal à celui de la loi binomiale qu'elle approche, soit $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.*

Remarque. En pratique, les conditions pour utiliser cette approximation sont variables et diffèrent d'un secteur professionnel à l'autre en fonction de contraintes spécifiques. Par exemple, on trouvera : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ ou $n \geqslant 25$ et $0{,}2 \leqslant p \leqslant 0{,}8$.

Exemple 8.4. On reprend la situation de l'exemple d'introduction du paragraphe 8.6.1 et on suppose que $n = 300$.
On admet que les conditions sont remplies pour pouvoir faire une approximation de la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(300\,;\,0{,}25)$ par la variable aléatoire Y suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.

1. Donner les paramètres μ et σ de la loi de la variable aléatoire Y.
2. Calculer $p(X \leqslant 68)$ et $p(Y \leqslant 68)$, puis $p(74 \leqslant X \leqslant 76)$ et $p(74 \leqslant Y \leqslant 76)$.
3. Que pensez-vous de la qualité de l'approximation effectuée ?

8.6.3 Correction de continuité

On rappelle qu'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale prend des valeurs entières k, tandis qu'une variable aléatoire Y suivant une loi normale prend toutes les valeurs réelles possibles, entières ou pas. Comme nous le montre l'exemple 8.4, l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale n'est pas toujours satisfaisante.
Il faut donc améliorer la façon dont on passe d'une variable discrète (ici binomiale) à une variable continue (ici normale).
Dans le cadre de l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale, on considère que l'ensemble des réels qui « s'arrondissent » à l'entier k est l'intervalle $[k-0{,}5 ; k+0{,}5]$.

Règle 8.1. *La correction de continuité consiste à remplacer l'évènement de la loi binomiale* $\{X=k\}$ *par l'évènement de la loi normale* $\{k-0{,}5 \leqslant Y \leqslant k+0{,}5\}$.

Remarques.

- Graphiquement, la correction de continuité consiste à remplacer un diagramme en bâtons par un histogramme, comme dans l'exemple 6. On remplace la hauteur d'un bâton par l'aire d'un rectangle de même hauteur et de largeur 1 ;
- En statistique, on effectue la démarche inverse : par exemple, pour calculer une moyenne ou un écart-type pour une variable continue, on a remplacé une classe $[a_i ; b_i[$, c'est-à-dire un intervalle, par son centre $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$, c'est-à-dire un nombre.

Exemple 8.5. On reprend la situation de l'exemple 8.4.

1. (a) Par quel évènement peut-on remplacer l'évènement $\{X \leqslant 68\}$, en procédant à une correction de continuité ?
   (b) En remarquant que l'évènement $\{74 \leqslant X \leqslant 76\}$ est l'évènement $\{X=74\} \cup \{X=75\} \cup \{X=76\}$, par quel évènement peut-on le remplacer en procédant à une correction de continuité ?
2. Calculer alors la probabilité de ces évènements et comparez-les aux résultats obtenus à l'exemple 8.4.

8.7 Exercices

8.7.1 Lois à densité

EXERCICE 8.2.
Soit a un réel et f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = ax(1-x)$

1. Déterminer le nombre réel a pour que cette fonction f soit une loi de densité sur $[0;1]$.
2. On considère X une variable aléatoire continue de densité f avec a ayant la valeur trouvée ci-dessus.
   Calculer la probabilité de l'évènement $\{0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}75\}$.

EXERCICE 8.3.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. f est la fonction définie sur $[0;1]$ par
   $$f(x) = 3x^2$$
   (a) Justifier que f est une fonction de densité sur $[0;1]$.
   (b) X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
   Calculer les probabilités des évènements suivants :
   - $p(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2})$
   - $p(X \in [0{,}4;0{,}6])$

   (c) Déterminer $E(X)$.
2. f est la fonction définie sur $[0;2]$ par
   $$f(x) = \frac{x}{2}$$
   (a) Justifier que f est une fonction de densité sur $[0;2]$.
   (b) X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
   Calculer les probabilités des évènements suivants :
   - $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$
   - $p(X \in [1;2])$

   (c) Déterminer $E(X)$.
3. f est la fonction définie sur $[-1;]$ par $f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$.
   (a) Justifier que f est une fonction de densité sur $[-1;1]$.
   (b) X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
   Calculer les probabilités des évènements suivants :
   - $p(-1 \leqslant X \leqslant 0)$
   - $p\left(X \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right)$

   (c) Déterminer $E(X)$.

EXERCICE 8.4.
On s'intéresse à la durée de vie X, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne.
On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de densité f, définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.
Ainsi $p(0 \leqslant X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années, et λ un réel positif.

1. Calculer $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$ en fonction de λ.
2. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18.
   Calculer λ.

EXERCICE 8.5.
On s'intéresse à la fonction $\ln x$, définie sur $]0\,;+\infty[$.

1. (a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln.

   (b) Trouver un nombre réel $b > 1$ tel que $\displaystyle\int_1^b \ln x\,\mathrm{d}x = 1$.

   On peut alors considérer la fonction ln comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1\,;b]$.

2. X est une variable aléatoire suivant la loi de densité ln sur l'intervalle $[1\,;b]$.

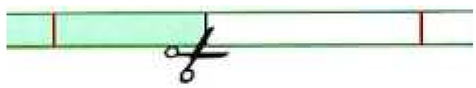
   (a) Calculer $p(X \leqslant 2)$.

   (b) Sachant que X est supérieur à 2, calculer la probabilité que X soit inférieur à 2,5.

8.7.2 Loi uniforme

EXERCICE 8.6.
On prend une bande de papier de 16 cm que l'on découpe en deux parties, totalement au hasard entre les deux traits.

La longueur du plus petit morceau est ainsi comprise entre 2 cm et 8 cm.



On note X la variable aléatoire égale à cette longueur. Elle suit la loi uniforme sur $[2\,;8]$.

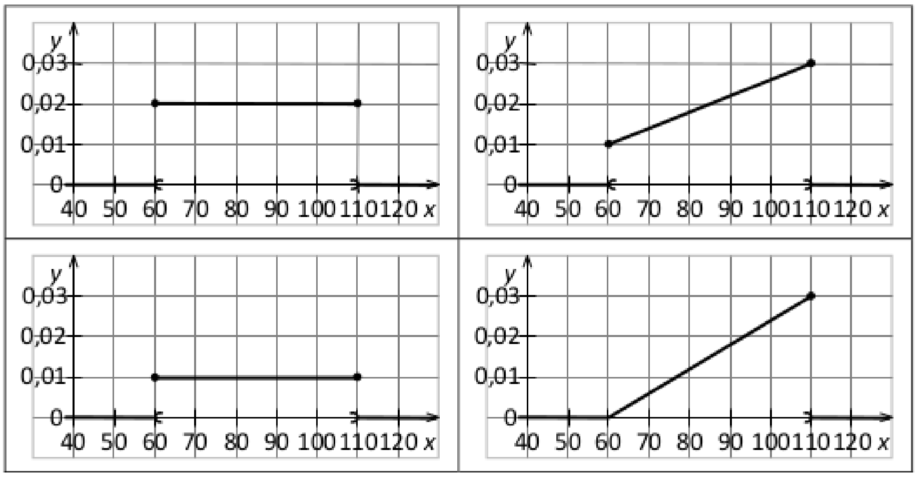
1. Déterminer la probabilité que le petit morceau mesure moins de 5 cm, puis qu'il mesure entre 3,5 et 5,5 cm.

2. Calculer l'espérance μ et l'écart-type σ de X.

3. Déterminer la probabilité que la longueur soit dans l'intervalle $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$.

EXERCICE 8.7.
Pour se rendre à son travail, Rudy emprunte les transports en commun. On note X la variable aléatoire égale à la durée du trajet total, exprimée en minutes. On admet que X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[60;110]$.

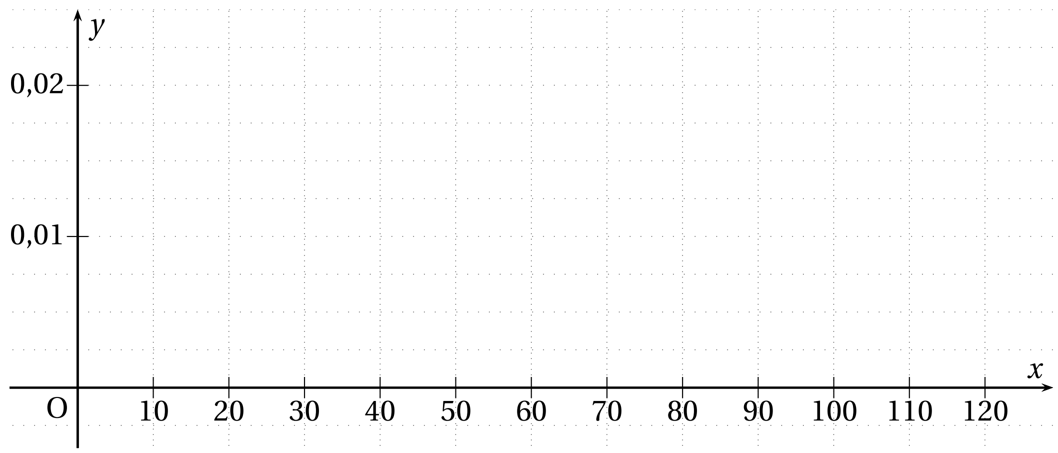
1. Choisir parmi les courbes des fonctions suivantes celle qui représente la densité de probabilité de la variable aléatoire X. Justifier ce choix.



2. Rudy effectue ce trajet un grand nombre de fois au cours de l'année.
   (a) Calculer le temps moyen d'un trajet, noté μ.
   (b) Placer μ sur le graphique choisi à la question 1.
   (c) Sur le graphique choisi à la question 1, colorier $p(X \leqslant \mu)$ et donner sa valeur.
   (d) Colorier, puis calculer la probabilité que le trajet de Rudy dure plus de 1h40.

EXERCICE 8.8.
Deux directeurs d'entreprise se connectent pour une visioconférence.
La durée de la communication, exprimée en minutes, est une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[10;90]$.

1. (a) Représenter graphiquement la fonction de densité f de cette loi dans le repère ci-dessous.



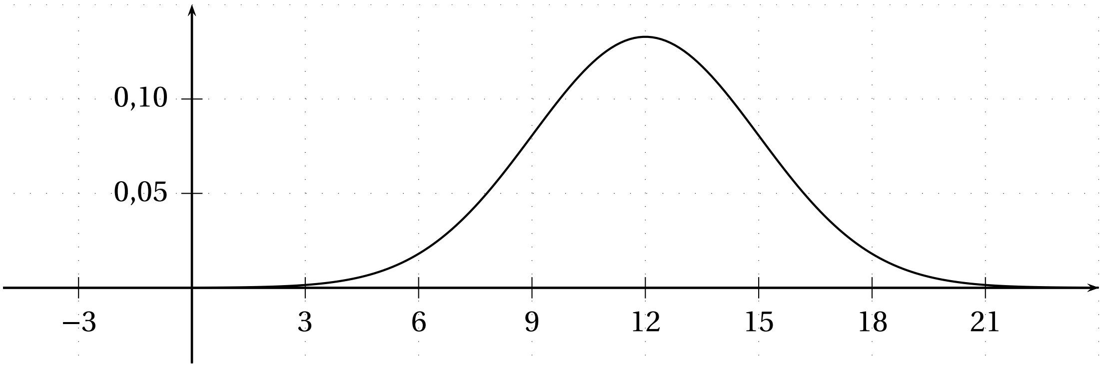
   (b) Calculer la probabilité que cette visioconférence n'excède pas 30 min. La représenter sur le graphique.
2. (a) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
   (b) Calculer l'écart-type $\sigma(X)$.
   (c) Calculer $p(E(X) - \sigma(X) \leqslant X \leqslant E(X) + \sigma(X))$.
3. Sachant que la visioconférence dure depuis 50 minutes, calculer la probabilité qu'elle n'excède pas 60 minutes.

EXERCICE 8.9.
Camille met en vente l'un de ses fauteuils, au prix initial de 60 €, sur un site de vente aux enchères.
Par expérience de ce type de vente, elle sait que le prix final ne dépassera pas 180 €, mais qu'il peut atteindre de manière équiprobable n'importe quelle valeur comprise entre 60 € et 180 €.

1. (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X égale au prix de vente final du fauteuil ?
   (b) À quel prix moyen Camille peut-elle espérer vendre son fauteuil ? Calculer l'écart-type de X.
2. Son ami Karl a vendu exactement le même fauteuil sur le même site au prix final de 120 €.
   (a) Calculer la probabilité que Camille vende son fauteuil à un prix dépassant le prix de celui de Karl.
   (b) Calculer la probabilité que Camille vende son fauteuil à un prix dépassant de 35 € le prix du fauteuil de Karl.
   (c) Sachant que le prix de vente du fauteuil de Camille est supérieur à 120 €, calculer la probabilité qu'il dépasse 155 €.

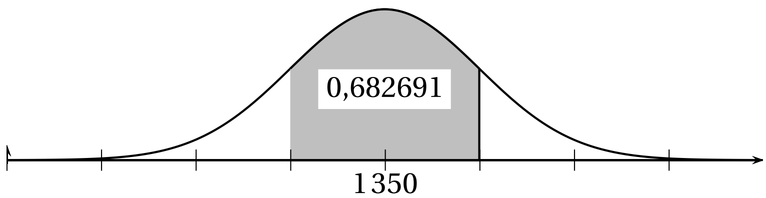
8.7.3 Loi normale

EXERCICE 8.10.
Le montant des factures d'une entreprise, exprimé en milliers d'euros, est considéré comme une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 12$ et d'écart-type $\sigma = 3$. On a représenté ci-dessous la courbe de densité de X :



1. (a) Placer μ, $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$.
   (b) Représenter en couleur $p(9 \leqslant X \leqslant 12)$.
2. Calculer puis interpéter :
   - $p(9 \leqslant X \leqslant 15)$
   - $p(X \leqslant 9)$
   - $p(X \geqslant 15)$
3. Calculer la probabilité que le montant d'une facture soit supérieur à 18 000 €.

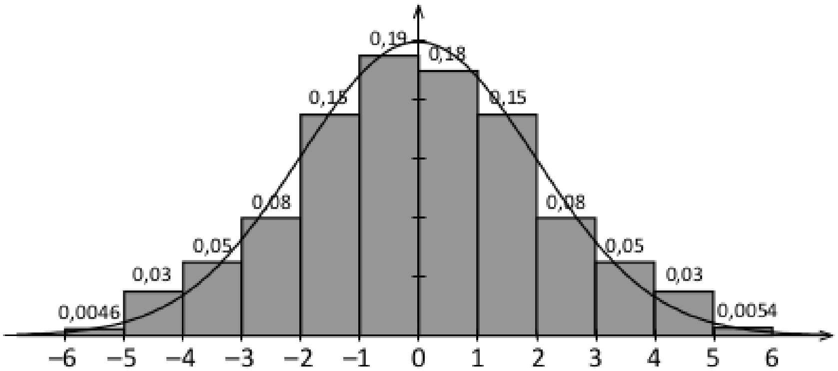
EXERCICE 8.11.
Dans une agence de voyage, les prix pour des séjours de 7 jours se répartissent suivant une loi normale représentée par la courbe de GAUSS suivante :



1. Sachant que l'écart-type est $\sigma = 250$, indiquer la probabilité représentée. L'interpréter.
2. En déduire $p(X \leqslant 1\,100)$ et $p(X \leqslant 1\,600)$.
3. Déterminer la probabilité qu'un séjour de 7 jours ait un prix supérieur à 1 850 €.

EXERCICE 8.12.
Chaque jour, l'arrivée du vol en provenance de Berlin est prévue à 9 h, mais elle peut avoir lieu avec quelques minutes d'avance ou de retard suivant la météo.
On étudie l'heure d'arrivée du vol, exprimée en minutes à partir de 9 h.
Par exemple, si l'avion atterrit en avance de 2 minutes, son heure d'arrivée est -2.

1. On a représenté ci-dessous l'histogramme des fréquences des heures d'arrivée de ce vol.



   Pour cette série, on admet que la moyenne $\overline{x} = 0$ et l'écart-type $\sigma = 2$.

   Calculer la proportion d'avions dont l'heure d'arrivée est comprise entre :
   (a) -2 et 2 ; (b) -4 et 4 ; (c) -6 et 6.

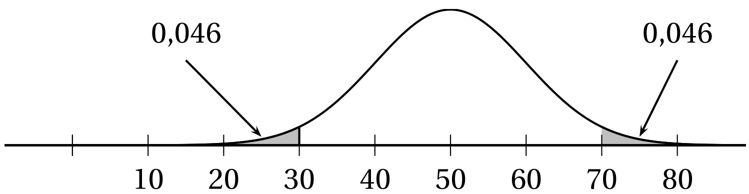
2. D'après les résultats précédents, on choisit de modéliser la distribution des heures d'arrivée pour ce vol par la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

   On note X la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée du vol, en minutes à partir de 9 h.

   (a) Donner, en utilisant votre cours, les trois probabilités de la question 1 arrondies au millième.

   (b) À la calculatrice, calculer $p(-3 \leqslant X \leqslant 4)$.

EXERCICE 8.13.
On réalise une étude statistique sur le montant des achats des clients d'un magasin spécialisé dans les accessoires et la décoration de la maison.
Cette étude montre que ces montants peuvent être modélisés par une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, représentée ci-dessous :



De plus, la probabilité que le montant des achats des clients soit supérieur à 70 € ou inférieur à 30 € est égale à 0,046.

1. Calculer la probabilité que le montant des achats soit compris entre 30 € et 70 €.

2. (a) Justifier que les nombres μ et σ vérifient le systéme d'équation : $\begin{cases} \mu - 2\sigma = 30 \\ \mu + 2\sigma = 70 \end{cases}$

   (b) Résoudre le systéme et déterminer l'espérance μ et l'écart-type σ.

3. Sur le site du magasin, on lit : « Livraison offerte à partir de 80 € ».

   Calculer la probabilité d'obtenir la gratuité de la livraison, pour un achat aléatoire.

EXERCICE 8.14.
Une étude menée sur l'eau du robinet provenant d'un même captage affirme que la quantité en milligrammes par litre (mg.L^{-1}) de nitrates suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 8. Selon le code de santé publique, la teneur en nitrates doit être inférieure à 50 mg.L^{-1} afin d'assurer la protection des femmes enceintes et des nouveaux-nés.
Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, que l'eau du robinet provenant de ce captage présente, par sa teneur élevée en nitrates, un risque pour la santé ?

EXERCICE 8.15.
Une étude sur le teck, arbre recherché pour la qualité de son bois, affirme que, cinq années après sa plantation, la hauteur d'un tel arbre suit la loi normale de paramètres $\mu = 23$ m et $\sigma = 1{,}5$ m.
Suite à des relevés, le propriétaire d'une exploitation de tecks plantés cinq ans auparavant apprend que la hauteur du plus grand teck sur son exploitation est de 20 m et celle du plus petit teck est de 16 m.
Doit-il s'inquiéter de la croissance des tecks plantés sur son exploitation ?

EXERCICE 8.16.
Le test le plus employé actuellement pour mesurer le quotient intellectuel (Q.I.) standard est le test de DAVID WECHSLER.
On appelle X la variable aléatoire qui à toute personne choisie au hasard associe son Q.I. mesuré à l'aide de ce test. On admet que X suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 15$.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un Q.I. entre 90 et 110 ?
2. Quelle est la proportion de personnes :
   (a) ayant un Q.I. entre 85 et 115 ?
   (b) ayant un Q.I. entre 70 et 130 ?
   (c) ayant un Q.I. entre 55 et 145 ?
3. Quelle est la proportion de personnes :
   (a) ayant un Q.I. supérieur à 115 ?
   (b) ayant un Q.I. supérieur à 130 ?
   (c) ayant un Q.I. supérieur à 145 ?
4. D'après la littérature sur le sujet, une personne est considéré comme un génie si son Q.I. est supérieur à 140. Quelle est la proportion de génies dans la population ?

Remarque. La fiabilité du test de Q.I., censé mesurer l'intelligence, est parfois contestée, certains prétendant que ce test ne mesure pas l'intelligence d'une personne mais seulement sa réussite au test de Q.I.

EXERCICE 8.17.
La taille exprimée en centimètres d'un enfant de cinq ans suit la loi normale d'espérance 105,5 cm et d'écart-type 4,7 cm.

1. Déterminer la probabilité qu'un enfant de cinq ans mesure entre 97 cm et 115 cm.
2. Peut-on affirmer qu'environ 94 % des enfants de cinq ans mesurent entre 97 et 115 cm ? Expliquer.

EXERCICE 8.18.
Le fabricant d'un jeu, après avoir effectué une enquête auprès d'un grand nombre de joueurs, a estimé que les durées des parties constituaient des données gaussiennes avec une moyenne $\mu = 62$ s et un écart-type $\sigma = 6$ s. Ce fabricant annonce : « Vous avez 95 % de chances de jouer chaque partie dans une durée comprise entre 50 s et 1 min 14 s. »

1. Sur quoi se fonde cette affirmation du fabriquant ?
2. Jean, passionné de ce jeu, a joué 40 parties. Peut-on affirmer que 95 % des 40 parties jouées par Jean ont une durée comprise entre 50 s et 1 min 14 s ?

Exercice 8.19.
Une machine remplit des paquets de pâtes dont le poids est supposé être de 500 g. On appelle X la variable aléatoire qui à tout paquet rempli par cette machine associe son poids en grammes. On admet que X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(500\,;2^2\right)$.

1. On choisit au hasard un paquet rempli par cette machine. Quelle est la probabilité que ce paquet ait un poids compris entre 490 g et 505 g ?
2. Un grand magasin affirme qu'un de ses clients a acheté un paquet de moins de 480 g. Que peut-on en penser ?

Exercice 8.20.
La quantité d'eau contenue dans une bouteille d'eau d'une certaine marque, exprimée en litres (L), suit la loi normale d'espérance 1 L et d'écart-type 0,02 L. On choisit au hasard une bouteille de cette marque.

1. Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement un litre ?
2. Préciser, sans calculatrice, la probabilité que cette bouteille contienne entre 0,96 et 1 L.
3. Est-il probable que cette bouteille contienne plus de 1,1 L ? Expliquer.
4. En déduire la probabilité qu'une bouteille choisie au hasard contienne plus d'un litre sachant qu'elle ne peut en contenir au maximum qu'un 1,1 L.

Exercice 8.21.
Le fréquence cardiaque est le nombre de pulsations du cœur par minute. La fréquence cardiaque au repos, en abrégé FCR, est la fréquence cardiaque la plus faible rencontrée chez une personne après une longue période de calme. On admet que la FCR d'un sportif régulier (qui pratique un sport 2 à 4 fois par semaine) suit la loi normale de paramètres $\mu = 52$ et $\sigma = 4$.

1. Sans calculatrice, préciser la probabilité (arrondie au centième) que la FCR d'un sportif régulier soit comprise entre 44 et 60.
2. Mehdi, cycliste régulier, affirme qu'il a une FCR comprise entre 38 et 40 pulsations par minutes. Ses camarades sont très sceptiques : sa FCR serait très proche de celle de Richard Virenque.
   Que peut-on en penser ? *Argumenter à l'aide d'un calcul.*

Exercice 8.22.
La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de type « Française Frissone Pis Noir » (FFPN) peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6\,000$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de ce type souhaite disposer de probabilité.
   (a) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de ce type produise moins de 5 800 L par an.
   (b) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de ce type produise entre 5 900 et 6 100 L de lait par an.
   (c) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de ce type produise plus de 6 520 L par an.

2. Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître :

   - la production maximale prévisible des 30 % des vaches les moins productives du troupeau ;
   - la production minimale prévisible des 20 % des vaches les plus productives.

   Répondre aux souhaits de l'éleveur.

EXERCICE 8.23.
Dans une grande entreprise, le DRH constate que le nombre annuel de jours d'arrêt de travail des salariés suit approximativement la loi normale d'espérance 28 et d'écart-type 4.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de jours d'arrêt de travail d'un salarié.
On interroge un salarié au hasard.

1. (a) Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité que le salarié interrogé ait dû prendre entre 25 et 30 jours d'arrêt de travail.
   (b) Préciser la valeur de $p(X \leqslant 28)$.
   (c) À l'aide des résultats du cours, donner la probabilité $p(24 \leqslant X \leqslant 32)$.
   (d) Calculer sans utiliser sa calculatrice $p(X \geqslant 32)$.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre k, arrondi à l'unité, tel que $p(X \leqslant k) = 0{,}025$.

Probabilité	**$P(X \leq k) = 0{,}025$**	**Résultat**
Calculatrice TI	Commande **Fracnormale(k,μ,σ)** : Menu **distr(2nde var) 3Fracnormale.** Compléter la boite de dialogue.	FracNormale aire:0.025 μ:28 σ:4 FracNormale(0.025,28,4) 20.16014406
Calculatrice Casio	Commande **InvNormCD(k,σ,μ)** : Menu **STAT**, puis **DIST(F5)** **NORM(F1)** et **InvNormCD(F3)** Compléter la boite de dialogue.	Inverse Normal Tail :Left Area :0.025 σ :4 μ :28 Inverse Normal x=20.1601441
Tableur	Commande **LOI.NORMALE.INVERSE(k,μ,σ)**	nombre 0,025 moyenne 28 ECARTYPE 4 =LOI.NORMALE.INVERSE(0,025;28;4) 20,1601440618

3. Le DRH décide de prendre des mesures pour améliorer les conditions de travail dans son entreprise afin de diminuer le nombre de jours d'arrêt de travail des salariés : X suit alors la loi normale d'espérance 25 et d'écart-type 5.
   (a) Calculer $p(X \leqslant 20)$. Arrondir au millième.
   (b) Comparer le résultat à celui de la question 2.

8.7.4 Loi binomiale et loi normale

EXERCICE 8.24.
Lors d'une récolte, la part de pommes commercialisables est de 80%.
On prélève 49 pommes, prélèvement assimilé à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pommes commercialisables parmi les 49.

1. (a) Préciser la loi de X et ses paramètres.
   (b) Calculer $p(X \leqslant 42)$ à la calculatrice à 10^{-4} près.
   (c) En déduire $p(X > 42)$.
2. On approche la loi de X par une loi normale de paramètres μ et σ.
   (a) Préciser les valeurs de μ et de σ.
   (b) On appelle Y la variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres μ et σ.
   En utilisant la correction de continuité, la probabilité que le nombre de pommes commercialisables soit strictement supérieur à 42 est $P(Y \geqslant 42{,}5)$. Calculer cette probabilité à 10^{-4} près et comparer avec le résultat obtenu à la question 1c.

EXERCICE 8.25.
Dans une ville, une enquête révèle que 60% des foyers ont sécurisé leur logement.
Une entreprise spécialisée dans les systèmes de sécurité interroge au hasard 150 personnes de cette ville, indépendamment les unes des autres, afin de trouver de nouveaux clients.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant sécurisé leur logement parmi les 150.
Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au millième près.

1. (a) Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   (b) Calculer $p(X = 90)$ et $p(X \geqslant 100)$.
   (c) Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat.
   (d) Calculer $\sigma(X)$.
2. On décide d'approcher la loi de X par une loi normale de paramètres μ et σ.
   On appelle Y la variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(\mu ; \sigma)$.
   (a) Préciser la valeur des paramètres μ et σ.
   (b) Calculer $p(Y \geqslant 100)$ sans utiliser la correction de continuité.
   (c) Calculer $p(Y \geqslant 100)$ en utilisant la correction de continuité, c'est-à-dire en calculant $p(Y \geqslant 99{,}5)$.
   (d) Comparer les deux résultats précédents au résultat de la question 1b. Lequel est le plus proche ?

EXERCICE 8.26.
Une enquête dans une gare révèle que 75% des usagers lisent au moins un des journaux gratuits qui sont proposés le matin.
On interroge 80 usagers de cette gare, choisis au hasard et indépendamment les uns des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'usagers lisant au moins un des journaux gratuits.

1. (a) X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
   (b) Calculer $p(X \leqslant 60)$ et $p(56 \leqslant X \leqslant 64)$.
   (c) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat.
   Calculer l'écart-type de X.
2. On décide d'approcher la loi de X par une loi normale de paramètres μ et σ.
   On appelle Y la variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$.
   (a) Préciser la valeur des paramètres μ et σ.
   (b) Calculer $p(Y \leqslant 60)$ et $p(56 \leqslant Y \leqslant 64)$ sans utiliser la correction de continuité.
   (c) Calculer une valeur approchée des probabilités de la question 1b en utilisant une correction de continuité, c'est-à-dire en calculant $p(Y \leqslant 60{,}5)$ et $p(55{,}5 \leqslant Y \leqslant 64{,}5)$.
   (d) Comparer les résultats précédents aux résultats obtenus en 1b.
3. Si strictement moins de 56 usagers parmi ceux interrogés lisent des journaux gratuits, les distributeurs ne poursuivront pas leur action dans cette gare. Calculer la probabilité qu'ils arrêtent la distribution en utilisant la variable aléatoire et en tenant compte de la correction de continuité.

8.7.5 Problèmes

La plupart des problèmes ci-dessous nécessitent de retrouver σ ou μ en passant par la loi normale centrée réduite.

PROBLÈME 8.1.
L'entreprise Granulex distribue un certain aliment dans un contenant métallique dont le poids après remplissage est en moyenne de 340 grammes.
Le poids est distribué normalement avec un écart-type de 4 grammes.
Toutefois on peut ajuster le processus de remplissage pour obtenir une valeur moyenne désirée sans changer l'écart-type.

1. Quelle est la probabilité qu'un contenant choisi au hasard de la production ait un poids entre 334 et 346 g ?
2. Sur une production de 1 000 contenants, combien auront un poids inférieur Ã 330 grammes ?
3. À quel niveau moyen doit-on fixer le remplissage de sorte que seulement 5 % des contenants aient un poids supérieur à 348 grammes ?

PROBLÈME 8.2.
Un ascenceur peut supporter une charge de 1 000 kg. On admet qu'un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a une masse, en kg, qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 75$ kg et $\sigma = 16$ kg et que la somme des masses de n personnes dont la masse suit cette loi normale suit elle-même une loi normale de d'espérance $n \times \mu$ et d'écart-type $\sigma \times \sqrt{n}$.

1. L'ascenseur peut-il supporter 9 personnes ?
2. L'ascenseur peut-il supporter 11 personnes ?
3. Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter dans l'ascenseur si l'on veut que le risque de surcharge ne dépasse pas 10^{-6} ? *Justifier.*

PROBLÈME 8.3.
Lors d'une consultation, le médecin informe le couple Leïla et Nathanaël qu'« un garçon de trois mois pèse en moyenne 5,3 kg » et qu'« il y a 50 % de chances que son poids soit compris entre 4,8 kg et 5,8 kg ». Il ajoute toutefois qu'« il n'y a aucun inquiétude à avoir tant que le poids de l'enfant est *normal* », c'est-à-dire tant qu'il se situe dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$.
Le fils du couple pèse 4,1 kg et est âgé de trois mois.
En admettant que le poids en kilogrammes d'un garçon de trois mois suit une loi normale, la situation est-elle préoccupante ?

PROBLÈME 8.4 (D'après BTS Chimiste 2007)**.**
Deux chaînes de production, A et B, d'un laboratoire pharmaceutique fabriquent en très grande quantité le comprimé d'un nouveau médicament dont la masse théorique de vente est de 900 mg.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On note X_A (respectivement X_B) la variable aléatoire qui, à un comprimé pris au hasard dans la production de la chaîne A (respectivement B), associe sa masse en milligrammes.
   On sait que X_A (respectivement X_B) suit la loi normale de paramètres $(m_A ; \sigma_A)$ (respectivement $(m_B ; \sigma_B)$).
   Un comprimé est jugée conforme au cahier des charges si sa masse est comprise entre 880 mg et 920 mg.
   (a) On donne $m_A = 896$ mg et $\sigma_A = 10$ mg. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un comprimé pris au hasard dans la chaîne A soit conforme.
   (b) On donne $m_B = 900$ mg. La probabilité qu'un comprimé fabriqué par la chaîne B soit conforme est 0,97. Déterminer, à l'unité près, l'écart-type σ_B.
2. Dans la production totale, 40 % des comprimés proviennent de la chaîne A et 60 % de la chaîne B. La chaîne A produit 4 % de comprimés non conformes et la chaîne B en produit 3 %. On prélève au hasard un comprimé dan la production du laboratoire. On note :
   - A l'évènement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne A » ;
   - B l'évènement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne B » ;
   - C l'évènement « Le comprimé est conforme ».

   (a) À partir de l'énoncé, préciser les probabilités des évènements A et B ainsi que les probabilités conditionnelles de C sachant A et de C sachant B, notées $p_A(C)$ et $p_B(C)$.
   (b) Calculer alors la probabilité $p(C)$ de l'évènement C.
   (c) On prélève un comprimé au hasard dans la production et on constate qu'il est conforme. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il provienne de la chaîne A.

PROBLÈME 8.5.
Une entreprise fabrique en grande série des tubes de 2 m de longueur à utiliser lors d'une installation électrique. Si une plus grande longueur est nécessaire lors de l'installation, ces tubes sont prévus pour s'emboîter les uns dans les autres grâce à une forme évasée à l'une des deux extrémités.
Dans ce problème, les résultats seront à arrondir à 10^{-3}.
Un tube fabriqué par cette entreprise est dit conforme lorsque le diamètre d_1 de l'extrémité de forme évasée du tube, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle $[17{,}5\,;\,18{,}5]$ **et** lorsque le diamètre d_2 de l'autre extrémité, exprimé aussi en millimètres, appartient à l'intervalle $[15{,}5\,;\,16{,}5]$.

1. On note D_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube prélevé au hasard dans la production de cette entreprise, associe le diamètre en millimètres de l'extrémité de forme évasée du tube.
   On suppose que la variable aléatoire D_1 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(18\,;\,0{,}2^2\right)$.
   Calculer $p(17{,}5 \leqslant D_1 \leqslant 18{,}5)$.
2. On note D_2 la variable aléatoire qui, à chaque tube prélevé au hasard dans la production de cette entreprise, associe le diamètre en millimètres de l'extrémité de forme non évasée du tube.
   On suppose que la variable aléatoire D_2 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(16\,;\,\sigma_2^2\right)$.
   On admet que $p(15{,}5 \leqslant D_2 \leqslant 16{,}5) = 0{,}97$.
   Déterminer une valeur approchée au centième près de l'écart-type σ_2.
3. On admet que : $p(\{17{,}5 \leqslant D_1 \leqslant 18{,}5\} \cap \{15{,}5 \leqslant D_2 \leqslant 16{,}5\}) = 0{,}98$.
   Interpéter ce résultat.

PROBLÈME 8.6.
Dans une population, la glycémie, taux de sucre dans la sang, exprimée en grammes par litre (g.L^{-1}), vérifie les résultats suivants :

- 15 % des individus présentent une glycémie inférieure à 0,82 g.L^{-1} ;
- 20 % des individus présentent une glycémie supérieure à 0,95 g.L^{-1}.

On suppose que la glycémie de cette population suit une loi normale.

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type de cette loi.
2. Préciser la probabilité d'avoir un taux de glycémie *normal*, c'est-à-dire compris entre $[\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]$.
3. L'hyperglycémie correspond à une glycémie supérieure à 1,26 g.L^{-1}.
   Quelle est la probabilité pour un individu de cette population de souffrir d'une hyperglycémie ?

PROBLÈME 8.7.
Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut-être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.
La machine peut être réglée pour modifier la valeur moyenne sans changer l'écart-type.
La législation impose qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles contenant moins d'un litre.

1. À quelle valeur minimum de la moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette législation ?
2. La contenance maximale des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?
3. Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1 % de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.
   (a) Quelle est alors la valeur de μ ?
   (b) Quelle est, dans les conditions de la question précédente, la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?
   (c) Déterminer μ et σ afin qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles de moins d'un litre **et** moins de 1 % de bouteilles qui débordent.

PROBLÈME 8.8.
Un appareil portatif multimédia fabriqué par la société Multisonic est garanti contre tout défaut de fabrication durant une période de 2 ans.
D'après l'expérience de la compagnie, il y a un appareil sur 1 000 qui présente une défectuosité majeure dans des conditions normales d'utilisation, 26 mois après l'achat.
D'autre part, les chances d'observer une défectuosité majeure durant les 52 mois suivant l'achat sont de 975 sur 1 000.
Supposons que le temps requis après l'achat pour qu'une défectuosité majeure survienne est distribué normalement.
Quelle est la probabilité qu'un appareil présente une défectuosité majeure avant la fin de sa période de garantie ?