Devoir surveillé n° 7

Logarithme népérien – Calcul intégral

EXERCICE 7.1 (6 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.
Cocher l'affirmation exacte pour chaque question, sachant qu'une affirmation exacte rapporte 1 point, l'absence d'affirmation, les affirmations multiples ou une affirmation fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

1. La valeur exacte de $\ln\left(10\mathrm{e}^2\right)$ est :

   ☐ $2\ln(10)+2$ ☐ 4,302585093 ☐ $\ln(10)+2$ ☐ $2\ln(10\mathrm{e})$

2. Soit j la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $j(x)=1+\ln(x)$.
   L'équation $j(x)=0$ a pour solution :

   ☐ e ☐ -1 ☐ $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ☐ 1

3. La solution exacte de l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{3}{10}$ est :

   ☐ 1,74 ☐ $\frac{\ln(10)-\ln(3)}{\ln(2)}$ ☐ $-\frac{\ln(3)}{\ln(5)}$ ☐ 0,6

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x)+\ln(2)\geqslant\ln(3x-6)$ est :
   ☐ $]2\,;6]$ ☐ $[6\,;+\infty[$ ☐ $]0\,;6]$ ☐ $]0\,;4]$

5. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f : x\longmapsto\frac{\ln(x)}{x}$.
   On note f' sa fonction dérivée. Alors :

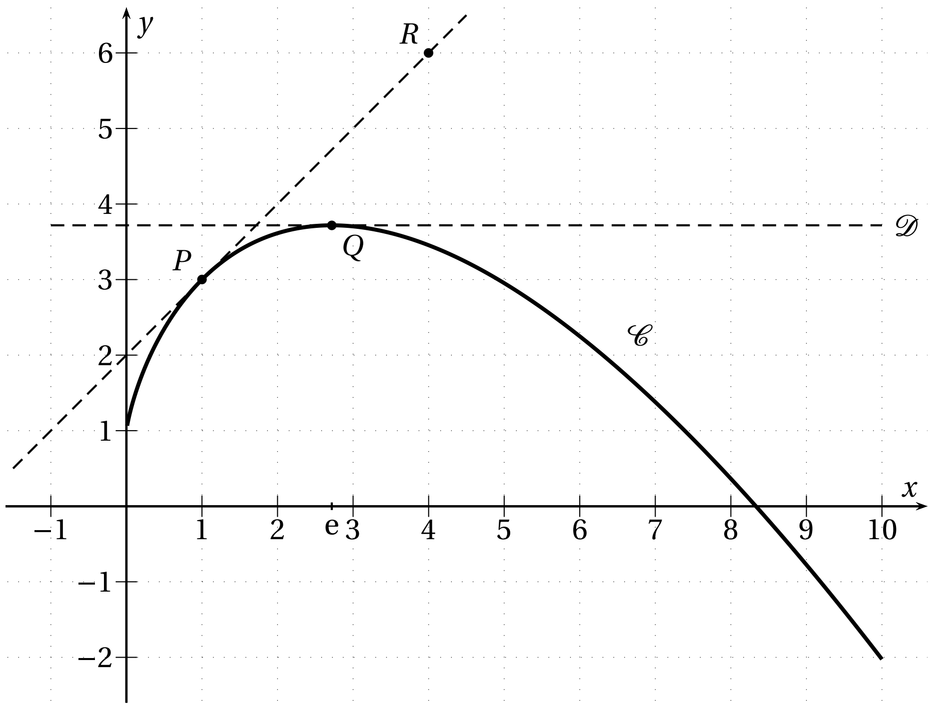
   ☐ $f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{x^2}$ ☐ $f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$ ☐ $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ ☐ $f'(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}$

6. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f : x\longmapsto\ln(x)$.
   Une primitive de f est la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

   ☐ $\frac{1}{x}$ ☐ $x\ln(x)$ ☐ $x\ln(x)-x$ ☐ e^x

EXERCICE 7.2 (14 points)**.**

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé d'origine O est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;10]$.



On considère les points $P(1\,;3)$ et $R(4\,;6)$. Le point Q a pour abscisse e, avec $\mathrm{e} \approx 2{,}718$.

Les points P et Q appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q.

La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point Q.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A. Dans cette partie, les résultats seront donnés à l'aide d'une lecture graphique et sans justification.

1. Parmi les trois propositions ci-dessous, quelle est celle qui désigne l'équation de la droite (PR) ?
   (a) $y = 2x+1$ (b) $y = x+2$ (c) $y = 2x+2$
2. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Une seule de ces trois propositions est exacte :
   (a) f est convexe sur l'intervalle $]0\,;10]$;
   (b) f est concave sur l'intervalle $]0\,;10]$;
   (c) f n'est ni convexe ni concave sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   Laquelle ?
4. Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ par deux entiers consécutifs.

Partie B. La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :

$$f(x) = -x\ln x + 2x + 1.$$

1. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0\,;10]$.
   (c) Calculer la valeur exacte du maximum de la fonction f sur ce même intervalle.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;10]$.
3. On admet que la fonction F définie par

$$F(x) = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{5}{4}x^2 + x - 7$$

   est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.