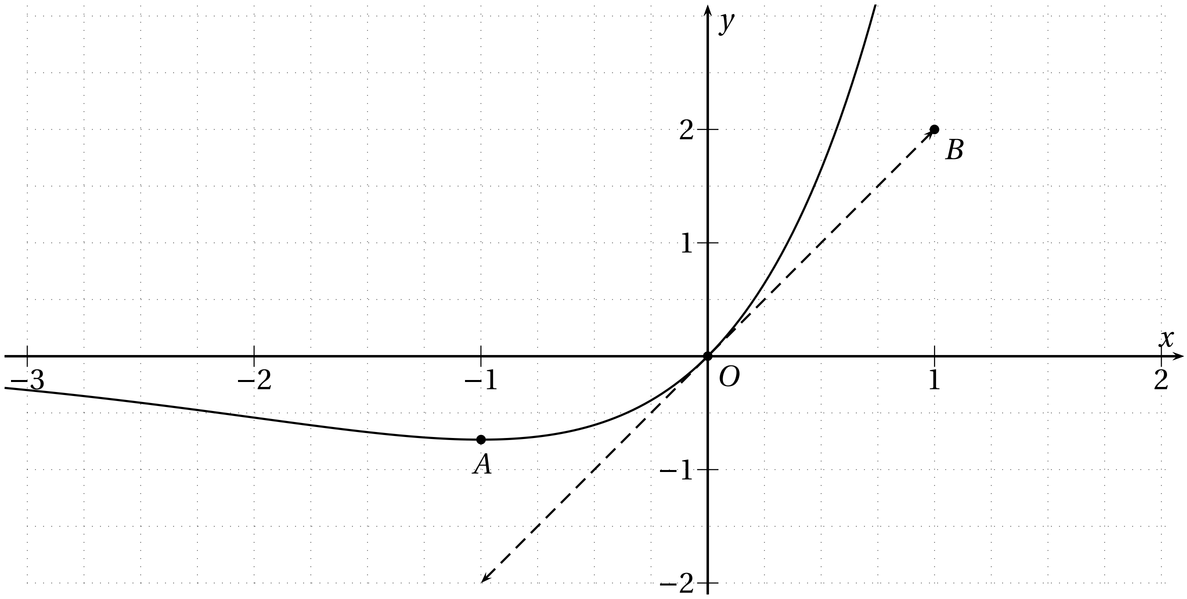
Devoir surveillé n°6

Dérivation – Trigonométrie

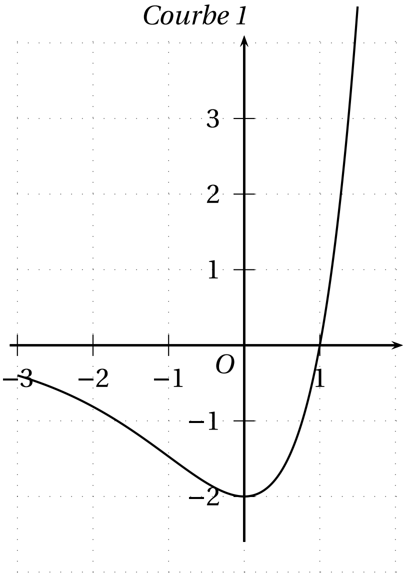
EXERCICE 6.1 (3 points)**.**
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

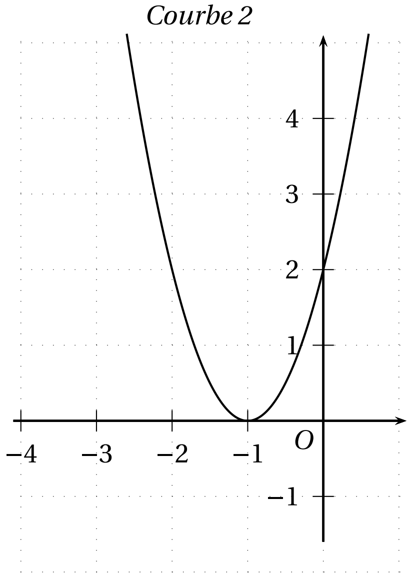
- $f : x \longmapsto (2x-1)(4x+3)$
- $g : x \longmapsto (x^2+2x+3)\sqrt{x}$
- $h : x \longmapsto \frac{1}{x^3+2x^2}$

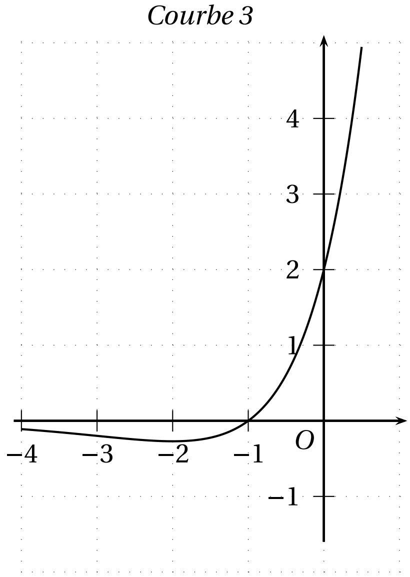
EXERCICE 6.2 (4,5 points)**.**
Dans le repère ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe passe par les points $O(0\,;0)$ et $A(-1\,;\alpha)$ avec $\alpha \approx -0{,}74$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente à la courbe en O passe par le point $B(1\,;2)$.



1. En justifiant déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$.
2. Une des courbes ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
3. Une des courbes ci-dessous représente une fonction g telle que $g' = f$. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.





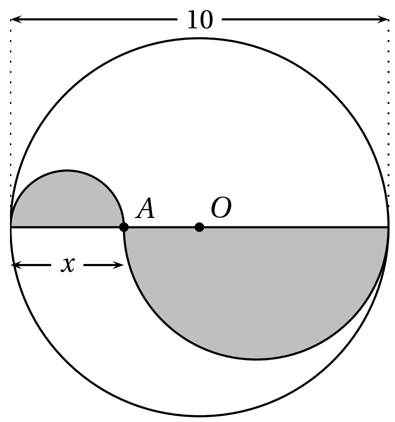


EXERCICE 6.3 (6 points)**.**
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

$$f : x \longmapsto \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

1. Soit f' la fonction dérivée de f.
   Montrer que $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Étudier les variations de f et dresser le tableau des variations de f en y indiquant les valeurs exactes des extremums locaux.
3. Déterminer les coordonnées des points de la courbe de f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

EXERCICE 6.4 (3 points)**.**
Soit le cercle de centre O et de diamètre 10 cm.
Sur l'un de ses diamètres, on place le point A et on construit deux demi-disques dont les centres sont sur ce diamètre et tels qu'indiqués par la figure ci-dessous, où x un nombre strictement compris entre 0 et 10.



On rappelle que l'aire S d'un disque de rayon r est donnée par la formule $S = \pi \times r^2$.

On appelle $\mathscr{A}(x)$ l'aire grisée en fonction de la valeur de x.

1. Quel est l'ensemble de définition de $\mathscr{A}$?
2. Montrer que $\mathscr{A}(x) = \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 10x + 50\right)$.
3. Déterminer la postion de A telle que l'aire grisée est minimale.

EXERCICE 6.5 (8,5 points)**.**
Les questions sont indépendantes.

1. Pour chacun des réels suivants, donner leur mesure principale puis la valeur exacte de leur cosinus et de leur sinus.
   - $x = \frac{20\pi}{3}$
   - $y = \frac{21\pi}{4}$
   - $z = \frac{291\pi}{6}$
2. Exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$ chacune des expressions suivantes :
   - $A = \cos(\pi + x)$
   - $B = \sin(\pi - x)$
   - $C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
   - $D = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
3. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
4. Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. Question bonus (hors barème) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$.