Chapitre 15

Fonctions $\ln(u)$ et $\exp(u)$

Sommaire

15.1 Fonction $\ln(u)$

15.1.1 Définition

Définition 15.1. Soit u une fonction strictement positive sur un intervalle I. La fonction $f = \ln(u)$ est la fonction définie sur I par $f : x \longmapsto \ln[u(x)]$.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \ln(x-4)$. Déterminer sur quel ensemble est définie f.

15.1.2 Dérivée

Propriété 15.1. *Soit u une fonction strictement positive et de dérivée u' sur un intervalle I. La fonction $f : x \longmapsto \ln(u)$ est dérivable sur I et $f' = \frac{u'}{u}$.*

Exemple. f est définie par $f : x \longmapsto \ln(x^2+4)$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Comparer les variations de f à celles de $x \longmapsto x^2+4$.

Remarque. Ce cas est généralisable : La dérivée de $\ln(u)$ est toujours du signe de $u'(x)$ car, comme $u(x) > 0$ sur I, alors $f'(x)$ est du signe de son numérateur qui est $u'(x)$. Ainsi $\ln(u)$ et u ont les mêmes variations sur I.

15.1.3 Résolutions d'équations et d'inéquations

Équations de la forme $\ln(u) = k$

- On cherche d'abord sur quel intervalle J la fonction u est strictement positive. Les solutions retenues après résolution devront être dans I et dans J.
- On se ramène sur I à une équation de la forme $\ln[u(x)] = \ln(a)$ avec $a > 0$ équivalente à $u(x) = a$ ou bien on utilise la fonction exponentielle.
- On ne retient parmi les solutions trouvées que celles qui appartiennent à I et à J.

Exemple. Résoudre sur l'intervalle I donné, les équations suivantes :

1. $\ln(x+2) = 0$ sur $I = [0; 10]$.
2. $\ln(x+2) = \ln(3-x)$ sur $I = [0; 2]$.

Inéquations de la forme $\ln(u) > k$

- On cherche d'abord sur quel intervalle J la fonction u est strictement positive. Les solutions retenues après résolution devront être dans I et dans J.
- On se ramène sur I à une équation de la forme $\ln[u(x)] > \ln(a)$ avec $a > 0$ équivalente à $u(x) = a$ ou bien on utilise la fonction exponentielle.
- On ne retient parmi les solutions trouvées que celles qui appartiennent à I et à J.

Remarque. On procède de même pour les autres types d'inéquations.

Exemple. Résoudre sur $[4; 10]$ l'inéquation $\ln(2x-6) < 1$.

15.2 Fonction $\exp(u)$

15.2.1 Définition

Définition 15.2. Soit u une fonction définie sur un intervalle I. La fonction $f = \exp(u) = e^u$ est la fonction définie sur I par $f : x \longmapsto \exp[u(x)] = e^{u(x)}$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto e^{2x+1}$.

15.2.2 Dérivée

Propriété 15.2. *Soit u une fonction de dérivée u' sur un intervalle I. La fonction $f : x \longmapsto \exp(u) = e^u$ est dérivable sur I et $f' = u' \times \exp(u) = u' \times e^u$.*

Exemple. f est définie par $f : x \longmapsto \exp(-x^2+3)$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Comparer les variations de f à celles de $x \longmapsto -x^2+3$.

Remarque. Ce cas est généralisable : La dérivée de $\exp(u)$ est toujours du signe de $u'(x)$ car, comme $e^{u(x)} > 0$, alors $f'(x)$ est du signe que $u'(x)$. Ainsi $\exp(u)$ et u ont les mêmes variations sur I.

15.2.3 Résolutions d'équations et d'inéquations

Équations de la forme e$^u = k$

- On vérifie d'abord que $k > 0$, sinon l'équation n'a pas de solution.
- On se ramène sur I à une équation de la forme $\mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^a$ équivalente à $u(x) = a$ ou bien on utilise la fonction logarithme népérien.

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x+2} = 3$.
2. $\mathrm{e}^{x^2-1} = 1$.

Inéquations de la forme e$^u > k$

- On examine le signe de k et on en tire les conséquences.
- On se ramène sur I à une équation de la forme $\mathrm{e}^{u(x)} > \mathrm{e}^a$ équivalente à $u(x) > a$ ou bien on utilise la fonction logarithme népérien.

Remarque. On procède de même pour les autres types d'inéquations.

Exemple. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations :

1. $\mathrm{e}^{-2x+1} < 3$
2. $\mathrm{e}^{x+3} > -1$
3. $\mathrm{e}^{x^2-1} < -2$

15.3 Exercices

EXERCICE 15.1.

1. Rappeler quel est le signe de $\ln(x)$ selon les valeurs de x.
2. Déterminer le signe des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :
   (a) $f(x) = \ln(x) + 1$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
   (b) $f(x) = \ln(x+8)$ sur $]-8\,;+\infty[$.

EXERCICE 15.2.

1. Rappeler que est le signe de e^x selon les valeurs de x.
2. Déterminer le signe des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:
   (a) $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
   (b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2-1}$.
   (c) $f(x) = \frac{-0{,}5x+3}{\mathrm{e}^{0{,}5x}}$.

EXERCICE 15.3.
Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

1. $f(x) = \ln(2x-4)$ sur $I =]2\,;+\infty[$.
2. $f(x) = 4x^2 + \ln(1+x^2)$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = 1 - \ln(12-x)$ sur $I = [1\,;6]$.
4. $f(x) = x\ln(2x+1)$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
5. $f(x) = [\ln(x)]^2$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
6. $f(x) = \frac{4}{\ln(2x-2)}$ sur $I =]1\,;+\infty[$.

EXERCICE 15.4.
Pour chacune des fonctions suivantes définie sur l'intervalle I :

- Calculer $f'(x)$;
- Étudier le signe de $f'(x)$;
- Dresser le tableau des variations de f.

1. f définie sur $I = [1\,;30]$ par $f : x \longmapsto x + 50 - 18\ln(x)$.
2. f définie sur $I = [-2\,;2]$ par $f : x \longmapsto \ln(x^2+5)$.

EXERCICE 15.5.
Une entreprise fabrique et vend q tonnes d'un produit de base. Le bénéfice réalisé, en milliers d'euros, pour produire ces q tonnes est défini sur l'intervalle $[0,5\,;9]$ par :

$$B(q) = 0{,}5q^2 - 14q - 68 + 49\ln(2q+4)$$

1. L'entreprise réalise-t-ell un profit lorsqu'elle vend 2 tonne de produit? 5 tonnes? 8 tonnes?
2. (a) Déterminer l'expression du bénéfice marginal $B'(q)$, dérivé du bénéfice.
   (b) À la calculatrice, calculer le bénéfice marginal pour 2,13 tonnes.
   (c) Pour une tonne, le bénéfice marginal est-il positif? Même question pour 4 tonnes.
3. (a) Utiliser la calculatrice pour trouver la quantité à partir de laquelle l'entreprise réalise un bénéfice marginal négatif sur $[0,5\,;9]$.
   (b) D'après le tableau de valeurs du bénéfice marginal $B'(q)$, commenter les valeurs du bénéfice marginal de part et d'autre de 5 tonnes.

EXERCICE 15.6.
Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
2. $f(x) = \mathrm{e}^{-4x^2}$.
3. $f(x) = 4\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$.
4. $f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}$.
5. $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{0,5x}$.
6. $f(x) = \frac{2}{1+\mathrm{e}^{2x-3}}$.

EXERCICE 15.7.
Le bénéfice engendré par la vente de peluches est modélisé par $B(q) = 12 - q - \mathrm{e}^{4-q}$ où q est en milliers de peluches, $q \in [1,5\,;14]$ et $B(q)$ est en milliers d'euros.

1. Calculer la dérivée de la fonction B et étudier le signe de $B'(q)$.
   En déduire le sens de variation de la fonction B sur $[1,5\,;14]$.
2. Quelle quantité de peluches à vendre permet de réaliser un bénéfice maximal?
3. Justifier le nombre de solutions de l'équation $B(q) = 0$ dans l'intervalle $[1,5\,;14]$.
   En utilisant la calculatrice, donner une valeur arrondie de ces solutions à 0,001 près.
4. En déduire la plage de profit. Arrondir à une peluche près.

EXERCICE 15.8.
Sur le marché en gros à Nantes, l'offre de champignons pleurotes, en tonnes, peut se modéliser par la fonction f et la demande par la fonction g telles que : $f(x) = 1{,}5\ln(x-2)+4$ et $g(x) = 2\mathrm{e}^{-x+3}+2$, pour un prix x entre 2,5 et 5 € par kg.

1. Visualiser à la calculatrice, dans une fenêtre adaptée, les courbes des fonctions f et g et déterminer le prix d'équilibre du marché.
2. Calculer les dérivées de ces deux fonctions f et g et étudier le signe de $f'(x)$ et $g'(x)$.
   En déduire le sens de variation des fonctions f et g sur $[2,5\,;5]$.
3. Résoudre les équations $f(x) = 4$ et $g(x) = 4$.
4. Sur ce marché, à quel prix l'offre est-elle égale à la demande?
   Quelle est la quantité de pleurotes échangées au prix d'équilibre?

EXERCICE 15.9.
Une entreprise de loisirs qui possède 60 bateaux les loue à la semaine. Les données financières sont exprimées en milliers d'euros (k€) et les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} près.

Partie A : Étude du coût de fonctionnement hebdomadaire
Le coût de fonctionnement hebdomadaire $C(q)$, exprimé en milliers d'euros, correspondant à la location d'un nombre q de bateaux est donné par : $C(q) = 15 + 2q - 20\ln(0{,}1q + 1)$ pour $0 \leqslant q \leqslant 60$.

1. (a) Calculer $C(10)$ et $C(20)$. Le coût de fonctionnement hebdomadaire est-il proportionnel au nombre de bateaux loués ?
   (b) Déterminer le pourcentage d'augmentation du coût de fonctionnement hebdomadaire lorsque le nombre de bateaux loués passe de 10 à 20.
2. (a) Montrer que $C'(q) = \frac{0{,}2q}{0{,}1q+1}$.
   En déduire le sens de variation de la fonction C sur l'intervalle $[0;60]$.
   (b) Calculer le coût de fonctionnement hebdomadaire maximal (exprimé en k€).

Partie B : Étude du bénéfice
Chaque bateau est loué 3 000 euros la semaine.

1. Montrer que le bilan financier hebdomadaire $B(q)$, exprimé en k€, correspondant à la location d'un nombre q de bateaux est donné par : $B(q) = q + 20\ln(0{,}1q + 1) - 15$ pour $0 \leqslant q \leqslant 60$.
2. Calculer $B'(q)$ et en déduire le sens de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;60]$.
3. (a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

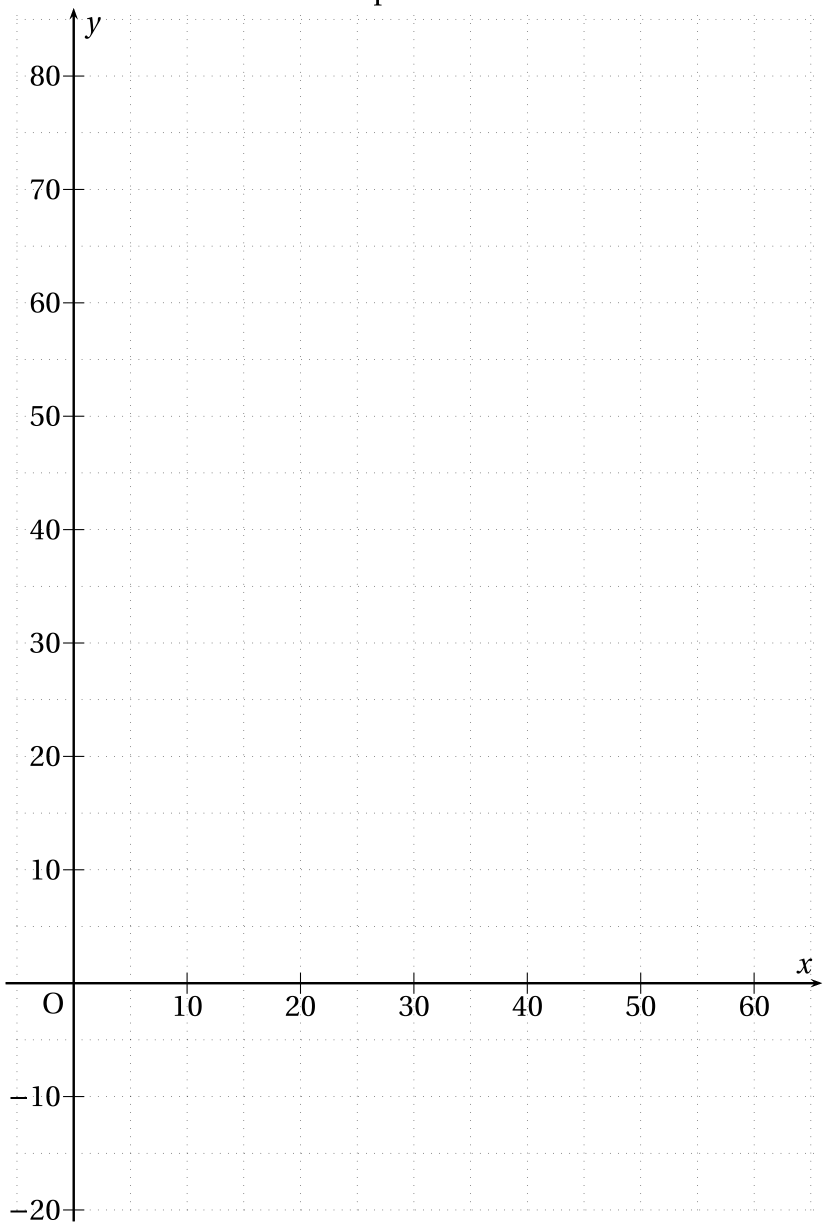
q	0	5	10	20	30	40	60
$B(q)$	-15			27			

   (b) Construire la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction B dans le repère de la figure 15.1 page suivante.
4. Déterminer graphiquement, en faisant figurer les tracés utiles, le nombre minimum de bateaux que l'entreprise doit louer pendant cette semaine pour obtenir :
   (a) Un bénéfice (positif) ;
   (b) Un bénéfice supérieur à 20 k€.

EXERCICE 15.10.
Sur un marché autorégulé, pour une quantité q variant de 2 à 7 tonnes, la fonction offre d'un produit est modélisée par $f(q) = 5 + 10e^{-0{,}3q}$ et la fonction demande par $g(q) = \frac{49}{5+10e^{-0{,}3q}}$, les prix $f(q)$ et $g(q)$ sont exprimés en euro par kg.

1. (a) Calculer la dérivée des fonctions f et g et étudier le signe de $f'(q)$ et $g'(q)$.
   (b) En déduire le sens de variation des fonctions f et g sur $[2;7]$.
2. (a) Représenter ces deux fonctions à l'écran de la calculatrice dans la fenÃªtre : $X \in [2;7]$ et $Y \in [0;11]$.
   Existe-t-il un point d'intersection entre les deux courbes ? En déterminer l'abscisse q_E et l'ordonnée p_E.
   (b) Retrouver le résultat par le calcul en résolvant l'équation $f(q) = g(q)$ sur l'intervalle $[2;7]$.
   (c) Interpréter les nombres p_E et q_E.

FIGURE 15.1: Repère de l'exercice 15.9



3. Les consommateurs sont très demandeurs, et veulent 7 tonnes de produit.
   Quel est le prix correspondant à cette demande ?
   Y a-t-il excédent ou pénurie de ce produit sur le marché ? Justifier.

4. Pour faire face à leur frais et aux nouveaux impôts, les producteurs offrent leur produit à un prix de 8 euro le kg.
   Y a-t-il excédent ou pénurie de ce produit sur le marché ? Pour cela, estimer l'offre et la demande à ce prix.

15.4 Travaux dirigés

EXERCICE 15.11 (Fonction logistique)**.**

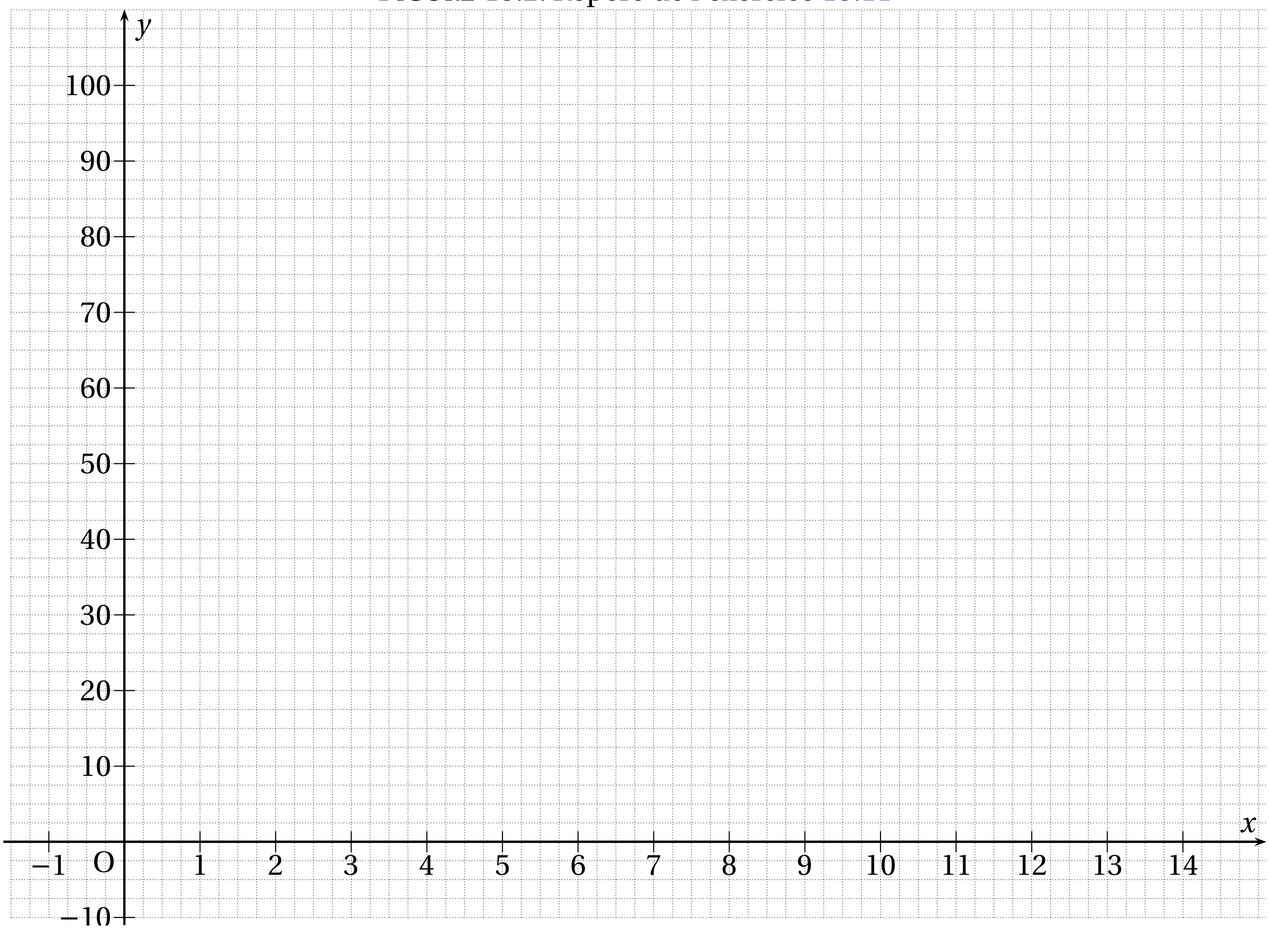
Partie A : Ajustements

Depuis l'année 2003, on étudie le taux d'équipement des 12 ans et plus en ordinateurs et internet à domicile. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Taux d'équipement y_i	15,4	19,4	24	29,3	35,2	41,4	47,8	54,2	60,2	65,8

1. Ajustement affine
   (a) Représenter le nuage de points associés à la série $(x_i\,;\,y_i)$ dans la figure 15.2 page suivante.

FIGURE 15.2: Repère de l'exercice 15.11



   (b) Un ajustement affine vous semble-t-il justifié ? Vérifier en déterminant le coefficient de corrélation avec la calculatrice.
   (c) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Arrondir les coefficients au centième.
   Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique précédent.
   (d) À l'aide de cet ajustement, quel taux peut-on prévoir pour 2017 ?

(e) Cet ajustement reste-t-il valable sur le moyen terme ?

2. Ajustement logistique
Compte-tenu des limites de notre ajustement affine, on envisage un ajustement du taux d'équipement par une fonction logistique f définie sur $[0\,;30]$ par : $f(x) = \frac{c}{1+ae^{-bx}}$ avec a, b et c des nombres réels.

   (a) Donner, avec la calculatrice, la valeur de b arrondie l'unité et celle de a et c arrondie à 10^{-2} près.
   Pour les Casio : **calc**, **REG**, puis faire défiler avec F6 et **Lgst**.
   Pour les TI : **CALC**, puis **8 :Logistic**.

   (b) À l'aide de cet ajustement, quel taux peut-on prévoir pour 2017 ?

Partie B : Étude de l'ajustement

Dans la suite, on admet que la part des 12 ans et plus ayant internet à la maison est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;30]$ par $f(x) = \frac{92}{1+\mathrm{e}^{1,6-0,28x}}$ où x est le temps écoulé depuis 2000, exprimé en années, et $f(x)$ le taux d'équipement en %.

1. Calculer $f(10)$ et interpréter le résultat.

2. On a obtenu ci-contre, la dérivée de la fonction f à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

```
1 derive(92/(1+exp(1.6-0.28x)),x)
```

$$\frac{25.76 * \exp(-0.28 * x + 1.6)}{(\exp(-0.28 * x + 1.6) + 1)^2}$$

   (a) Donner, sans justification, l'expression de $f'(x)$.

   (b) Justifier que la dérivée est positive sur $[0\,;30]$.
   En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;30]$.

   (c) Justifier que l'équation $f(x) = 90$ a une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0\,;30]$.

   (d) Donner un encadrement d'amplitude 0,1 de x_0.

3. Peut-on prévoir que 92 % des 12 ans et plus seront équipés d'internet à domicile ?