

Chapitre 5

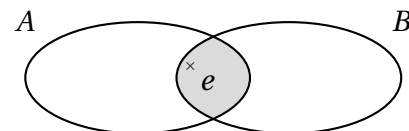
Proportions

Sommaire

5.1 Vocabulaire des ensembles	47
5.2 Proportions	48
5.2.1 Activité d'introduction	48
5.2.2 Bilan et compléments	49
5.2.3 Proportions échelonnées	49
5.3 Exercices	50

5.1 Vocabulaire des ensembles

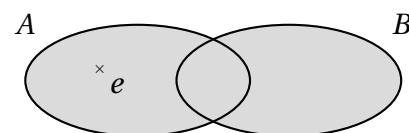
Définition 5.1 (Intersection). L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B . On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

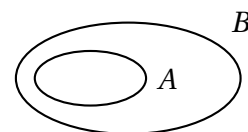
Remarque. Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 5.2 (Réunion). La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B . On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 5.3 (Inclusion). On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B . On note alors $A \subset B$ (« A inclus dans B ») ou $B \supset A$ (« B contient A »).

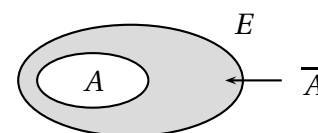


On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B .

Remarque. $\emptyset$ (dite *partie vide* ou *ensemble vide*) et E (dite *partie pleine*) sont toujours des parties de E .

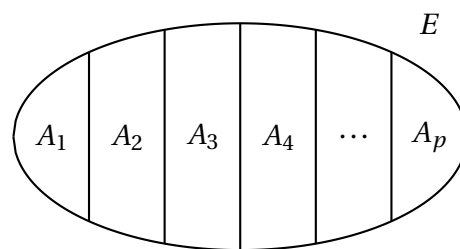
On notera $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E .

Définition 5.4 (Complémentaire). Soit E un ensemble et A une partie de E . Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . On le note $\bar{A}$.



Remarque. $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Définition 5.5. Des parties $A_1, A_2, \dots, A_p$ d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E .



Exemple. Au Lycée Dupuy de Lôme, en pre-bac, les élèves sont en Seconde, Première ou Terminale. Ces trois parties réalisent une partition de l'ensemble des élèves du Lycée (pre-bac) car aucun élève n'est commun à deux de ces parties et, réunies, elles forment l'ensemble des élèves du Lycée (pre-bac).

Définition 5.6 (Cardinal). Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal* de E . Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{R}$).

Propriété 5.1. Soit E un ensemble contenant un nombre fini d'éléments et A et B deux parties de E . Alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

On l'admettra.

Une conséquence de cette propriété est :

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(A \cup \bar{A}) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) - \text{Card}(\emptyset) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) - 0 = \text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A})$$

5.2 Proportions

5.2.1 Activité d'introduction

ACTIVITÉ 5.1.

Il y a 16 garçons dans une classe de 26 élèves. Quel est la proportion des garçons dans cette classe?

5.2.2 Bilan et compléments

Définition 5.7. On a les définitions suivantes :

Population : Une *population* E est un ensemble faisant l'objet d'une étude statistique.

Sous-population : Un échantillon d'individus (ou partie ou sous-ensemble) d'une population E est une *sous-population* de E .

Élément : Un élément de la population est un *individu*.

Effectif : Le nombre d'individus de la population est l'*effectif* de la population.

Définition 5.8. Soit A une sous-population d'effectif $Card(A)$ d'une population E d'effectif $Card(E)$.

La proportion p_A (ou fréquence) de A dans E est le quotient défini par

$$p_A = \dots\dots$$

Exemple. Une classe comporte 18 filles et 12 garçons.

Les élèves de cette classe forment une population E d'effectif $Card(E) = \dots\dots$

La population F des filles de la classe est une sous-population de E d'effectif $n_F = \dots\dots$

La proportion de F dans E , c'est-à-dire la proportion des filles dans la classe, est $p_F = \dots\dots$

Remarques.

- Une proportion est un nombre réel compris entre ...et...et n'a pas d'unité.
- Une proportion s'exprime souvent sous forme de pourcentage.
On écrit aussi bien $p = \frac{3}{5}$ ou $p = \dots\dots$ ou $p = \dots\dots$
- Si on connaît deux des trois nombres $Card(A)$, $Card(E)$ et p_A , on peut calculer le troisième :

$$\text{Comme } p_A = \frac{Card(A)}{Card(E)} \quad \text{alors } Card(A) = \dots\dots \quad \text{ou encore } Card(E) = \dots\dots$$

Par exemple, si l'on veut calculer 3 % de 240 :

$$\text{On a } Card(E) = \dots\dots \quad p_A = \dots\dots \quad \text{Donc } Card(A) = \dots\dots$$

Propriété 5.2. Soit E un ensemble non vide contenant un nombre fini d'éléments et A et B deux parties de E . Alors :

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

Preuve. $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

$$\Leftrightarrow \frac{Card(A \cup B)}{Card(E)} = \frac{Card(A)}{Card(E)} + \frac{Card(B)}{Card(E)} - \frac{Card(A \cap B)}{Card(E)}$$

$$\Leftrightarrow p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

◇

5.2.3 Proportions échelonnées

Propriété 5.3. Soit E un ensemble, A une partie de E et B une partie de A . On note $p_{A/E}$ et $p_{B/E}$ les proportions respectives de A et B dans E , $p_{B/A}$ la proportion de B dans A . Alors :

$$p_{B/E} = p_{A/E} \times p_{B/A}$$

Preuve. Par définition : $p_{A/E} = \frac{Card(A)}{Card(E)}$, $p_{B/E} = \frac{Card(B)}{Card(E)}$ et $p_{B/A} = \frac{Card(B)}{Card(A)}$.

$$\text{Alors : } p_{A/E} \times p_{B/A} = \frac{Card(A)}{Card(E)} \times \frac{Card(B)}{Card(A)} = \frac{Card(B)}{Card(E)} = p_{B/E}$$

◇

5.3 Exercices

EXERCICE 5.1.

Les questions sont indépendantes.

1. 35,89 millions de foyers fiscaux ont été recensés en France en septembre 2013. Sur ce total, 18,94 millions d'entre eux étaient imposables au titre de leur revenu de 2012.
Calculer la proportion des foyers imposables en septembre 2013. Traduire le résultat avec un pourcentage arrondi à 0,01 près.
2. Dans une grande entreprise, les $\frac{5}{6}$ des 720 employés sont des commerciaux.
Combien y a-t-il de commerciaux dans l'entreprise?
3. Dans une administration, 23 employés sont des personnels administratifs, ce qui représente 18 % des employés.
Combien y a-t-il d'employés dans cette administration?

EXERCICE 5.2.

Les questions sont indépendantes.

1. Un lycéen a travaillé pendant les vacances. Sur sa feuille de paye est inscrit :
 - Salaire brut : 1 200,00 €
 - Retenue Sécurité Sociale : 151,20 €Quel pourcentage du salaire brut, la retenue représente-t-elle?
2. En 2 004, la population active française comptait 27 455 000 individus, dont 12 680 000 femmes.
Quel pourcentage de la population active représentaient les femmes?
3. 28 % de la surface du territoire français, ce qui représente environ 154 000 km², est constitué de terrain boisé (forêts, etc.). Quelle est la surface totale du territoire français?
4. Lors de l'achat d'un article coûtant 1 625 €, je dois verser un acompte de 130 €. Quel pourcentage de la somme totale cet acompte représente-t-il?
5. Lors de l'achat d'un autre article, je dois verser un acompte de 15 %, et il me restera alors à déboursier 1 700 €. Quel est le prix de cet article?
6. (a) Dans la commune de Vachelle, sur 1 742 votants, 42 % ont choisi le candidat DESIRE.
Combien cela fait-il de voix?
(b) M. DESIRE a obtenu 428 voix sur 1 312 votants à Port-Blanc et 323 voix sur 918 votants à Saint-André. Où a-t-il fait le meilleur score en pourcentage?

EXERCICE 5.3.

Le tableau ci-dessous donne la répartition des filles dans trois classes de Première ES d'un Lycée.

Classe	A	B	C
Filles	10	8	9
Élèves	40	20	18

Déterminer la proportion de filles dans chacune des classes. Que constate-t-on?

EXERCICE 5.4.

Les questions sont indépendantes.

1. Une personne passe une petite annonce dans un journal diffusé dans 18 % des foyers d'un département. Elle passe aussi cette annonce dans un autre journal diffusé, lui, dans 25 % des foyers du département. À quelle condition cette personne peut-elle espérer que son annonce touche 43 % des foyers du département? Pourquoi?
2. Vrai ou faux? Dans une entreprise 21 % des employés a moins de 25 ans et 36 % a plus de 45 ans; donc 43 % du personnel de cette entreprise a entre 25 et 45 ans.
3. Dans cette entreprise, 40 % des employés ont suivi le stage de formation en comptabilité, tandis que 48 % ont suivi le stage d'anglais. Sachant que 35 % des employés ont suivi ces deux stages, quel pourcentage des employés de l'entreprise peut prétendre avoir suivi au moins l'un des deux stages?
4. Vrai ou faux? Dans cette même entreprise, 18 % des employés (hommes) a une ancienneté inférieure à 5 ans, tout comme 22 % des employées (femmes). Donc 40 % des employés de l'entreprise a une ancienneté inférieure à 5 ans.

EXERCICE 5.5.

Dans un établissement scolaire, il y a 30 % de garçons et 30 % des filles sont internes. Sachant que le pourcentage d'internes dans l'établissement est de 27 %, quel est le pourcentage de garçons internes?

EXERCICE 5.6.

Il y a 800 élèves au Lycée JACQUES CARTIER. dans ce Lycée :

- 15 % des élèves de Lycée sont des filles de Première;
- 48 % des élèves de Première sont des filles;
- 25 % des filles du Lycée sont en Première.

1. Calculer l'effectif des filles de Première.
2. En déduire l'effectif des élèves de Première, puis des filles dans ce Lycée.

3. Compléter le tableau des effectifs :

	Fille	Garçon	Total
Première			
Autres			
Total			

4. Calculer le pourcentage d'élèves de Première dans ce Lycée.

EXERCICE 5.7.

Dans une entreprise, 70 % des salariés sont des hommes, 6 % des femmes sont cadres et 4 % des hommes sont cadres.

1. Quel est le pourcentage des cadres dans cette entreprise?
2. Faire un tableau, en pourcentages de salariés de l'entreprise, résumant la situation.
3. L'entreprise compte 23 cadres. Quel est le nombre total de salariés?
4. Faire un tableau, en nombres de salariés de l'entreprise, résumant la situation.

EXERCICE 5.8.

Les questions sont indépendantes.

1. Un Lycée compte 1 250 élèves; 26 % d'entre eux sont en classe de Première et 24 % des élèves de Première sont en Première ES.
 - (a) Quel calcul doit-on effectuer pour déterminer le nombre d'élèves de Première du Lycée?
 - (b) Quel calcul doit-on faire pour déterminer le nombre d'élèves en Première ES dans ce Lycée?
 - (c) Combien y a-t-il d'élèves en Première ES dans ce Lycée? Quel pourcentage cela représente-t-il vis-à-vis de l'ensemble des lycéens?
 - (d) Quel calcul aurait-on pu faire directement pour déterminer ce pourcentage?
2. 75 % des foyers d'un pays ont une connexion Internet, dont 80 % de type ADSL. Quel est le pourcentage de foyers équipés d'une connexion ADSL dans ce pays?
3. Dans une population, 65 % des individus partent en vacances et 20 % de ceux qui partent en vacances vont à la montagne. Quelle est la proportion de départs à la montagne dans cette population?

EXERCICE 5.9.

Les questions sont indépendantes.

1. Considérons les statistiques (fictives) suivantes :
 - en janvier 2 004 : 2 183 500 chômeurs, dont 624 200 jeunes (moins de 25 ans);
 - en janvier 2 005 : 2 008 700 chômeurs, dont 617 400 jeunes.

Le nombre de chômeurs a-t-il diminué? Le nombre de jeunes chômeurs a-t-il diminué? Le pourcentage de jeunes chômeurs parmi l'ensemble des chômeurs a-t-il diminué?

2. Voici les chiffres d'affaires d'une entreprise (fictive) pendant quatre ans :

Année	1 997	1 998	1 999	2 000
CA (en millions d'€)	35	38	41	44

- (a) De combien de millions d'euros, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire?
- (b) De combien de millions d'euros en pourcentage, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire?