Chapitre 14

Loi binomiale

Sommaire

14.1 Variable aléatoire **177**

14.1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète 177

14.1.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire 178

14.2 Schéma de BERNOULLI **179**

14.2.1 Épreuve de BERNOULLI 179

14.2.2 Schéma de BERNOULLI 179

14.3 Loi binomiale **179**

14.3.1 Définitions et calculs 179

14.3.2 Espérance mathématique, variance et écart-type 181

14.4 Exercices **182**

14.5 Travaux dirigés **187**

14.1 Variable aléatoire

14.1.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition 14.1. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- On définit une *variable aléatoire discrète* X sur Ω quand on associe une nombre réel x_i à chaque issue ω_i de Ω.
- L'ensemble de ces nombres réels, noté $X(\Omega)$, est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
- L'évènement $(X = x_i)$ est l'ensemble des issues de X auxquelles on associe le réel x_i de $p(X = x_i)$ est sa probabilité.
- L'évèement $(X \leqslant x_i)$ est l'ensemble des issues de X auxquelles on associe un réel inférieur à x_i et $p(X \leqslant x_i)$ est sa probabilité.
- L'ensemble des couples $(x_i\,;\,p(X = x_i))$ est appelé *loi de probabilité* de la variable aléatoire X.

Remarques.

- On présente le plus souvent la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

- On définit de la même façon les évènements $(X < x_i)$, $(X \geqslant x_i)$ et $(X > x_i)$.

Exemple 14.1. Lors d'une tombola, les organisateurs vendent 100 billets numérotés de 1 à 100.

- Le billet numéroté 83 permet de gagner 50 € ;
- Les billets dont le numéro se termine par 3, autres que le billet n° 83, permettent de gagner 15 € ;
- Les billets dont le numéro se termine par 0 permettent de gagner 10 € ;
- On ne gagne rien avec les autres billets.

Tous les billets ont la même probabilité d'tre tirés. Une personne achète un billet.

1. Quelle est la probabilité que le billet acheté ait pour numéro 83 ? se termine par 0 ?
2. On définit une variable en associant à chaque billter le gain prévu par l'organisateur. Le gain étant aléatoire, on dira que l'on a défini une variable aléatoire.
   (a) Préciser l'ensemble $X(\Omega)$ des gains possibles.
   (b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire (sous forme de tableau).
   (c) Calculer la probabilité des évènements $(X \leqslant 10)$ et $(X > 0)$.

14.1.2 Espérance et variance d'une variable aléatoire

Définition 14.2. Soit X la variable aléatoire qui prend les n valeurs x_i avec des probabilités $p_i = p(X = x_i)$.

- L'espérance mathématique de X est le réel $E(X) = x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \ldots + x_n \times p(X = x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$.
- La variance de X est le réel positif $V(X) = [x_1 - E(X)]^2 \times p(X = x_1) + [x_2 - E(X)]^2 \times p(X = x_2) + \ldots + [x_n - E(X)]^2 \times p(X = x_n) = p_1[x_1 - E(X)]^2 + p_2[x_2 - E(X)]^2 + \ldots + p_n[x_n - E(X)]^2$.
- L'écart-type de X est le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques.

- Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la moyenne des valeurs prises par X tend vers l'espérance mathématique.
- Ces formules sont analogues à celles de la moyenne, de la variance et de l'écart-type en statistiques.
- La variance ou l'écart-type sont des indicateurs de la dispersion des valeurs prises par X, pondérés par leurs probabilités.
- On peut reconnatre dans $V(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire $[X - E(X)]^2$. Ainsi $V(X) = E[(X - E(X))^2]$.

- L'écart-type est exprimé dans la même unité que la variable aléatoire X.

Propriété 14.1. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = x_1^2 \times p(X = x_1) + x_2^2 \times p(X = x_2) + \ldots + x_n^2 \times p(X = x_n) - [E(X)]^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2 - [E(X)]^2$.

Exemple 14.2. On reprend la situation de l'exemple 14.1.

1. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.
2. Le prix d'un billet est de 5 €. En moyenne, l'acheteur du billet est-il gagnant ou perdant ?
3. Calculer la variance et l'écart-type de X.

14.2 Schéma de BERNOULLI

14.2.1 Épreuve de BERNOULLI

Définition 14.3. Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues :

- l'une, appelée en général *succès*, et notée S de probabilité p ;
- l'autre, appelée en général *échec*, notée E ou $\overline{S}$ de probabilité $q = 1 - p$.

Exemple 14.3. À la réception d'une commande d'un lot de pièces dans lequel 80 % sont conformes, le responsable du stock prélève au hasard une pièce du lot et vérifie si la pièce est défectueuse. Expliquer pourquoi cette expérience peut tre assimilée à une épreuve de BERNOULLI.

14.2.2 Schéma de BERNOULLI

Définition 14.4. L'expéreince aléatoire consistant à répéter une même épreuve de BERNOULLI n fois de manière indépendante s'appelle un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

Exemple 14.4. On reprend la situation de l'exemple 14.3.
Le responsable du stock prélève trois pièces du lot considéré. Le stock étant assez important, on peut considérer qu'il s'agit d'un tirage avec remise de la pièce après examen de celle-ci.

1. Montrer que cette situation correspond à un schéma de BERNOULLI.
2. Représenter l'arbre pondéré associé.
3. Quels sont les chemins pour lesquels une seule pièce est prélevée est défectueuse ?

14.3 Loi binomiale

14.3.1 Définitions et calculs

Définition 14.5. Soit un schéma de BERNOULLI de paramètres n et p.
La variable aléatoire X associée au nombre de succès obtenus à ce schéma prend les valeurs 0, 1, 2, …, n (soit $n + 1$ valeurs).

Définition 14.6. On représente à l'aide d'un arbre pondéré un schéma de BERNOULLI de paramètres n et p.
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions est noté $\binom{n}{k}$ (lire « k parmi n ») et appelé *coefficient binomial*.

Définition 14.7. Soit un schéma de BERNOULLI de paramètres n et p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus suit *la loi binomiale de paramètres n et p*, notée $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 14.5. On reprend la situation de l'exemple 14.3.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses parmi les trois prélevées.

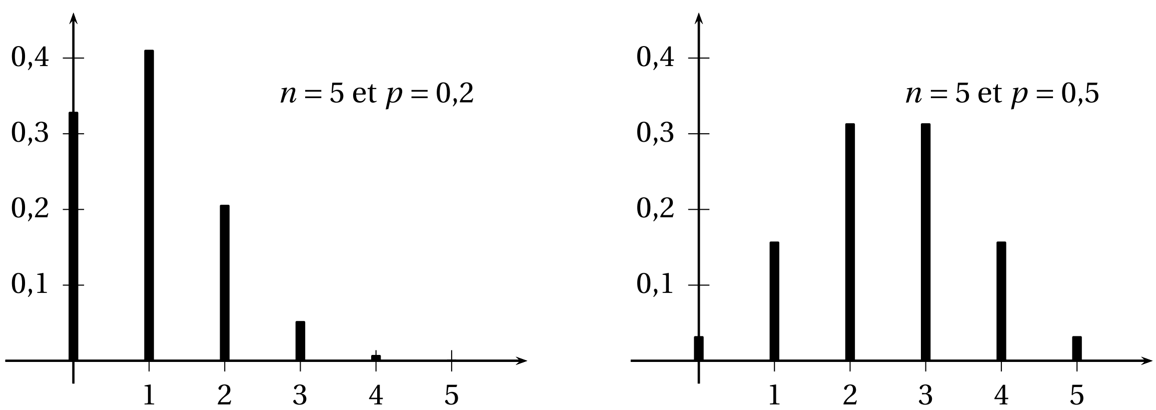
1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? En préciser les paramètres.
2. Quel est l'évènement $(X = 2)$? À l'aide de l'arbre pondéré, déterminer les chemins favorables à cet évènement.
3. Déterminer la probabilité de chacun de ces chemins.
4. En déduire la probabilité $p(X = 2)$.

Théorème 14.2. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et p.*
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Remarques.

- On représente une loi binomiale à l'aide d'un diagramme en bâtons. On indique :
  - en abscisse, les nombres de succès k ;
  - en ordonnée, les probabilités des évènements $(X = k)$.

  Par exemple, les représentations pour $n = 5$ et pour $p = 0{,}2$ et $p = 0{,}5$ sont données dans les repères ci-dessous.



- Pour calculer directement une probabilité, ou représenter graphiquement une loi binomiale, on utilise la calculatrice, le tableur ou un logiciel.

Probabilité	Calculatrice TI	Calculatrice Casio	Tableur
ponctuelle $P(X=7)$	binomFdp nbreEssais:10 p:0.2 valeur de x:7 Commande **binomFdp(n,p,x)** : Menu **distr** (**2nde var**) et **A:binomFdp**. Compléter la boite de dialogue.	Binomial P.D Data :Variable x :7 Numtrial:10 p :0.2 Commande **BinomialCD** : Menu **STAT**, puis **DIST**(**F5**) **BINM**(**F5**) et **BinomPD**(**F1**). Compléter la boite de dialogue.	x 7 tentatives 10 Probabilité 0,2 C 0 A 1 =LOI.BINOMIALE(7;10;0,2;0) Commande **LOI.BINOMIALE(k,n,p,0)**
Résultat	binomFdp(10,0.2,7) 7.86432E-4	Binomial P.D p=7.8643E-04	A 1 0,000786432

Probabilité	Calculatrice TI	Calculatrice Casio	Tableur
cumulée $P(X\leq 7)$	binomFRép nbreEssais:10 p:0.2 valeur de x:7 Commande **binomFdp(n,p,x)** : Menu **distr**(**2nde var**) et **A:binomFdp**. Compléter la boite de dialogue.	Binomial C.D Data :Variable x :7 Numtrial:10 p :0.2 Commande **BinomialCD(k,n,p)** : Menu **STAT**, puis **DIST**(**F5**), **BINM**(**F5**) et **BinomPD**(**F1**). Compléter la boite de dialogue.	x 7 tentatives 10 Probabilité 0,2 C 1 A 1 =LOI.BINOMIALE(7;10;0,2;1) Commande **LOI.BINOMIALE(k,n,p,1)**
Résultat	binomFRép(10,0.2,7) 0.9999220736	Binomial C.D p=0.99992207	A 1 0,9999220736

Exemple 14.6. On reprend la situation de l'exemple 14.3.
Le responsable du stock prélève dix pièces du lot considéré. On considère toujours que le stock est assez important pour considérer qu'il s'agit d'un tirage avec remise.
On note X le nombre de pièces défectueuses.

1. Préciser la loi de la variable aléatoire X.

2. Calculer avec la calculatrice ou le tableur $p(X=7)$ et $p(X\leqslant 7)$. Interpréter le résultat.

3. Calculer avec la calculatrice ou le tableur $p(X=0)$. En déduire la probabilité de l'évènement A : « Au moins une pièce est défectueuse ».

14.3.2 Espérance mathématique, variance et écart-type

Propriété 14.3. *Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.*

- *L'espérance mathématique de X et $E(X)=n\times p$.*
- *La variance de X est le réel positif $V(X)=n\times p\times(1-p)$.*
- *L'écart-type de X est le réel positif $\sigma(X)=\sqrt{n\times p\times(1-p)}$.*

Exemple 14.7. On reprend la situation de l'exemple 14.3.
Le responsable du stock prélève 80 pièces du lot considéré. On considère toujours que le sotck est assez important pour considérer qu'il s'agit d'un tirage avec remise.

1. Définir la loi de X.

2. Calculer l'espérance mathématique de X. Comment interpréter ce nombre ?

3. Calculer l'écart-type de X.

14.4 Exercices

EXERCICE 14.1.
Des plats cuisinés d'un certain type sont fabriqués en grandes quantités. On prélève au hasard un plat d'un lot dans lequel 97 % des plats sont conformes au cahier des charges. On remet le plat dans le lot et on effectue un deuxième prélèvement d'un plat. On répète une troisième fois l'expérience.

1. Justifier que ces trois prélèvements constituent un schéma de BERNOULLI. En préciser les paramètres.
2. Construire l'arbre pondéré représentant ce schéma.
3. Calculer la probabilité de l'évènement C : « les 3 plats prélevés sont conformes au cahier des charges ».

EXERCICE 14.2.
X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer :

1. $p(X=3)$, $p(X=0)$ et $p(X \leqslant 2)$ pour $n=6$ et $p=0{,}4$.
2. $p(X=6)$, $p(X \leqslant 9)$ et $p(X>4)$ pour $n=15$ et $p=0{,}1$.

EXERCICE 14.3.
Une entreprise produit en grande série des véhicules électriques équipés de batteries au nickel-cadmium.
Les véhicules sont parqués par lot de 75 avant de recevoir le certificat de conformité et d'être mis en location. On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 75 véhicules pris au hasard dans la production, associe le nombre de véhicules non conformes.
La production étant assez importante pour qu'on puisse assimiler tout échantillon de 75 véhicules à un échantillon aléatoire prélevé avec remise.
On suppose que la probabilité qu'un véhicule soit non conforme est 0,04.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.
2. Calculer $p(X=0)$ (arrondir à 10^{-3}) et interpréter le résultat.

EXERCICE 14.4.
On considère un stock important de flotteurs. On dit qu'un flotteur est acceptable si sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[24{,}5\,;25{,}5]$. La probabilité qu'un flotteur soit acceptable est 0,26.
On prélève au hasard six flotteurs dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de 6 flotteurs à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de flotteurs acceptables dans le prélèvement.
Donner les valeurs approchées arrondies à 10^{-3}.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux flotteurs exactement soient acceptables.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux flotteurs soient acceptables.

EXERCICE 14.5.
Dans une usine, une machine produit des barres de métal pour du matériel de jardin.
Dans la production d'une machine, 8 % des barres sont non conformes. On prélève un lot de 30 barres extraites au hasard de la production de la machine. Le nombre de barres produites est suffisamment important pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 30 barres.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 30 barres associe le nombre de barres de ce lot qui sont non conformes, donc mises au rebut.

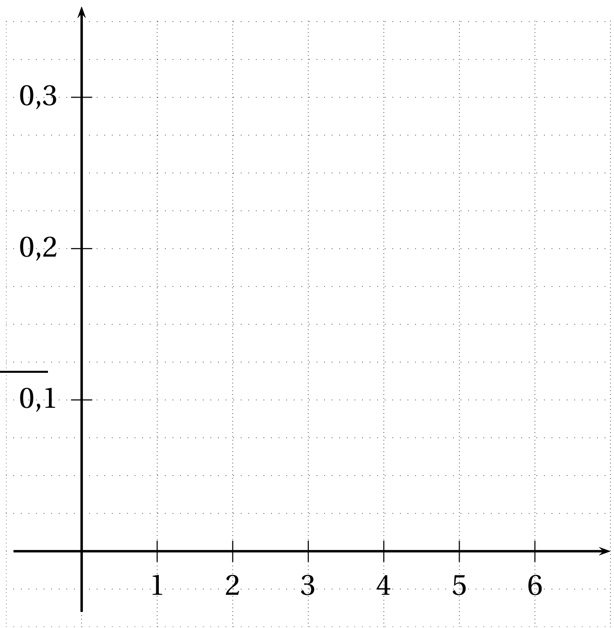
1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X et donner ses paramètres. Justifier.
2. Calculer la probabilité qu'aucune barre de ce lot ne soit mise au rebut.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel lot, au moins 90 % des barres soient mises au rebut.

EXERCICE 14.6.
X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(6\,;0{,}4)$.

1. Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau suivant (arrondir à 10^{-3}).

k	0	1	2	3	4	5	6
$p(X=k)$							

2. Construire le diagramme à bâtons représentant cette loi dans le repère ci-contre.



EXERCICE 14.7.
Une société est spécialisée dans la location de gros engins de chantier aux particuliers.
Elle constate environ 20 % de retards du retour des engins et décide d'appliquer une pénalité de 5 % qui s'ajoute au prix hors taxe de la facture.
On choisit 25 factures, indépendamment les unes des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de factures où apparaît une pénalité de retard.

1. (a) Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres.
   (b) Créer le tableau de valeurs de cette loi sur calculatrice, en plaçant dans la liste 1 la suite des entiers k de 0 à 25 et dans la liste 2 les probabilités $p(X=k)$.
   Voir le détail dans la table 14.1 page suivante.
2. (a) Lire la probabilité d'obtenir 5 factures exactement contenant une pénalité.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une facture contenant une pénalité.
3. (a) Calculer l'espérance E et l'écart-type σ de X. Interpréter l'espérance.
   (b) Calculer la probabilité $p(X \in [E-\sigma\,; E+\sigma])$.

TABLE 14.1: Explications pour l'exercice 14.7

Calculatrice TI	Calculatrice Casio
• Dans le menu de calculs : suite(K,K,0,25,1)→L1 {0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1▸ binomFdp(25,0.2)→L2 {0.0037778932 0.023611832▸ 2nde stats OP (▸) 5:suite(K,K,0,25,1) sto→ L1 (2nde 1). 2nde var DIST A:binomFdp(25,0.2) sto→ L2 (2nde 2). • Dans le menu stats : On visualise les listes dans **EDIT** (1). L1 L2 L3 L4 L5 0 0.0038 ------ ------ ------ 1 0.0236 2 0.0708 3 0.1358	• Dans le menu **RUN** : Seq(K,K,0,25,1)→List 1 Binomial P.D(25,0.2)→ List 2 OPTN LIST (F1) SEQ (F5) Seq(K,K,0,25,1) → List (SHIFT) 1. OPTN STAT (F5) DIST (F3) BIN(F5) Bpd(25,0.2) → List (SHIFT) 2. • Dans le menu **STAT** : On visualise les listes. List 1 List 2 List 3 List 4 SUB 1 0 3.8E-3 2 1 0.0236 3 2 0.0708

EXERCICE 14.8.
En 2012, d'après une étude Eurostats, 87 % des jeunes européens âgés de 18 à 24 ans utilisent quotidiennement Internet.
On interroge 100 jeunes européens au hasard âgés de 16 à 24 ans indépendamment les uns des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de jeunes utilisant Internet tous les jours.

1. (a) Reconnaître la loi suivie par X. Justifier.
   (b) À la calculatrice, calculer les probabilités :
   - $p(X = 87)$;
   - $p(X \leqslant 87)$;
   - $p(X < 87)$.
2. On donne la table ci-contre obtenue avec le tableur.
   (a) Donner les formules à saisir en **B2** et **C2** et à recopier vers le bas.
   (b) À l'aide de la table donnée, déterminer :
   - $p(X \leqslant 90)$;
   - $p(X > 92)$;
   - $p(90 \leqslant X \leqslant 92)$.
3. (a) D'après la table donnée, déterminer le plus grand entier a tel que $p(X \leqslant a) \leqslant 0{,}95$.
   (b) En déduire le nombre maximum de jeunes européens interrogés utilisant Internet pour que la probabilité qu'ils utilisent tous Internet, soit d'au plus 0,95.

	A	B	C
1	k	$P(X=k)$	$P(X \leq k)$
2	88	0,116513936	0,6611448
3	89	0,105134442	0,766279242
4	90	0,085994582	0,852273824
5	91	0,063242	0,915515824
6	92	0,041403417	0,956919241
7	93	0,023835218	0,980754458
8	94	0,011878599	0,992633057
9	95	0,005020752	0,997653809
10	96	0,001750022	0,999403831
11	97	0,000482956	0,999886787
12	98	9,8942E-005	0,999985728
13	99	1,3377E-005	0,999999105
14	100	8,9521E-007	1

EXERCICE 14.9.
À l'entrée d'une petite salle de cinéma, le caissier vend des pots de pop-corn. Il constate que la probabilité qu'un spectateur achète un pot de pop-corn est égale à 0,2.
Au cours de la soirée, 30 spectateurs entrent dans la salle et achètent ou non des pots de pop-corn indépendamment les uns des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de spectateurs ayant acheté un pot de pop-corn.

1. (a) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
   (b) Déterminer avec la calculatrice ou le tableur ou un logiciel le nombre de pots vendus le plus probables.
2. Justifier que $p(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}8^{50}$.
   Arrondir à 10^{-4} et en donner une interprétation.
3. (a) Calculer l'espérance E et l'écart-type σ de X.
   (b) Calculer la probabilité $p(E - 2\sigma \leqslant X \leqslant E + 2\sigma)$. Interpréter le résultat.
4. Le caissier réalise un bénéfice de 2 € sur la vente d'un pot de pop-corn.
   Calculer la probabilité que le caissier réalise un bénéfice de plus de 20 € pour cette seule séance.

EXERCICE 14.10.
Un représentant d'une marque d'automobiles démarche dix clients par jour. On suppose que chaque client lui commande une voiture neuve avec une probabilité de 0,05 et que chaque client prend la décision de commander ou non une voiture neuve en toute indépendance, sans être influencé par la décision des autres clients.

1. Calculer la probabilité, pour le concessionnaire, de vendre un jour choisi au hasard :
   - au moins une voiture ;
   - trois voitures exactement.
2. Le concessionnaire touche 200 € par voiture vendue.
   (a) Calculer la probabilité qu'il gagne au moins 400 € en une journée.
   (b) Quelle somme peut-il espérer toucher en un mois de travail soit 22 jours ouvrés ?

EXERCICE 14.11.
Dans le cadre d'une étude sur la psychologie du consommateur, une expérience a été menée dans un hypermarché. Un employé propose aux clients entrant dans le magasin de goûter gratuitement un nouveau jus de fruit. Certains clients acceptent la proposition.
En offrant le verre de jus de fruits, l'employé serre la main du testeur dans 70 % des cas. On constate que parmi les clients testeurs dont la main a été serrée, 40 % achètent le jus de fruits et que parmi les clients dont la main n'a pas été serrée, 15 % achètent le jus de fruits.
On considère les évènements :

- M : « la main du client a été serrée »
- A : « le client achète le jus de fruit ».

Dans cet exercice, les probabilités seront données arrondies à 10^{-4} près.

1. (a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

   (b) Calculer $p(M \cap A)$. Montrer que $p(A) = 0{,}325$.
   (c) Un client testeur a acheté le jus de fruits. Calculer la probabilité que sa main ait été serrée.

2. Dix clients testeurs du jus de fruits entrent dans le magasin. On suppose que la décision d'achat du jus de fruits par un des clients ne dépend pas des autres clients.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients ayant acheté le jus de fruits parmi les 10 clients testeurs.

   (a) X suit une loi binomiale. Déterminer ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité que 5 clients testeurs exactement parmi les 10, achètent le jus de fruits.
   (c) Calculer $p(X \leqslant 5)$. Interpréter le résultat.
   (d) Calculer la probabilité qu'au moins un client achète le jus de fruits.

3. On suppose que n clients testeurs sont entrés dans le magasin et ont goûté le jus de fruits.

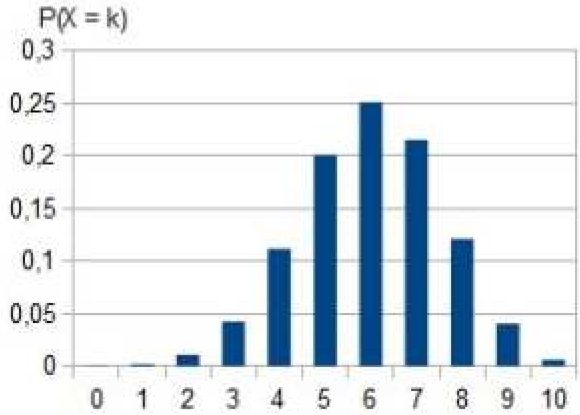
   (a) Calculer, en fonction de n, la probabilité qu'au moins un client testeur achète le jus de fruits.
   (b) Résoudre l'inéquation $1 - 0{,}675^n \geqslant 0{,}999$.
   (c) En déduire le nombre minimum de clients qui doivent goûter le jus de fruits pour que la probabilité qu'au moins un client ayant goûté ce jus, l'achète, soit supérieure à 0,999.

14.5 Travaux dirigés

EXERCICE 14.12.
X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(10; p)$.

1. Sur une feuille de calcul du tableur, obtenir le tableau de valeurs des probabilités $p(X=k)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	p	0,6										
2												
3	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	P(X = k)	0	0,002	0,011	0,042	0,111	0,201	0,251	0,215	0,121	0,04	0,006



2. (a) Représenter le diagramme à bâtons de la loi X lorsque :
   - $p = 0{,}1$;
   - $p = 0{,}5$;
   - $p = 0{,}6$.

   Quelle propriété possède le diagramme pour $p = 0{,}5$ qu'il ne possède pas pour les autres valeurs de p ?

   (b) Représenter le diagramme à bâtons de la loi de X lorsque :
   - $p = 0{,}1$ et $p = 0{,}9$;
   - $p = 0{,}01$ et $p = 0{,}99$.

   Quelle remarque peut-on faire sur les deux diagrammes ?

EXERCICE 14.13.
La RATP estime que la fraude dans les transports en commun est de 5 %.
On contrôle totalement au hasard n passagers de la RATP, indépendamment les uns des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de fraudeurs parmi les n usagers.

1. 10 usagers sont contrôlés.
   (a) Indiquer la nature et les paramètres de la loi suivie par la variable aléatoire X.
   (b) Calculer $p(X \leqslant 2)$ et l'interpréter.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins un des 10 usagers soit fraudeur. (Penser à l'évènement contraire).

2. On désire connaître le nombre n d'usagers à contrôler pour que la probabilité qu'au moins un des n usagers soit fraudeur soit supérieure à 0,99.

(a) Écrire cette probabilité pour $n = 25$.

(b) On donne l'algorithme ci-après pour déterminer l'entier n recherché.
Faire fonctionner l'algorithme à la main en notant vos résultats au fur et à mesure dans le tableau suivant :

q	1	0,95				
p	0	0,05				
n	1	2				

Initialisation
$n \leftarrow 0$
$p \leftarrow 1$
$q \leftarrow 1 - p$
Traitement
Tant que $p < 0{,}99$
$q \leftarrow 0{,}95 \times q$
$p \leftarrow 1 - q$
$n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que
Sorties
Afficher n et p

(c) Quelle est la condition de sortie de la boucle *tant que*?

(d) Quelles sont les valeurs obtenues en sortie ?

(e) Le nombre n affiché en sortie est-il le nombre n cherché ?

3. (a) Résoudre l'équation $0{,}95^n = 0{,}01$ à l'aide de la fonction ln.

(b) En déduire le premier entier n tel que $1 - 0{,}95^n \geqslant 0{,}99$.

(c) Sans faire fonctionner l'algorithme, déterminer le nombre minimum d'usagers à contrôler pour qu'au moins l'un d'eux soit fraudeur, avec une probabilité de 0,99.

Exercice 14.14 (Factures impayés)**.**
Sur l'exercice de l'année précédente, un agent comptable a constaté que 15 % des factures étaient impayées au bout de 30 jours et ont nécessité une relance. Il sait qu'il lui faut plus de temps pour le traitement d'une telle facture.
Cet agent comptable a dix factures à traiter et il aimerait prévoir le temps supplémentaire de travail.

1. Pour simuler la réalisation ou non d'un événement à deux issues, avec une probabilité p, on utilise l'instruction **ENT(ALEA()+p)** qui renvoie 1 avec une probabilité p et 0 sinon.

(a) Sachant que **ALEA()** renvoie un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0 ; 1[$, dans quel intervalle se situe le nombre **ALEA()+0,15**?

(b) Expliquer pourquoi **ENT(ALEA()+0,15)** vaut 1 avec une probabilité de 0,15.

2. L'agent comptable réalise la feuille de calcul ci-contre.
On saisit en **B2** la formule $\boxed{\textbf{= ENT(ALEA()+0,15)}}$, et on la recopie vers le bas sur la plage **B2 :B11**.

	A	B
1	Facture N°	Impayée ?
2	1	0
3	2	1
4	3	1
5	4	0
6	5	0
7	6	1
8	7	1
9	8	0
10	9	0
11	10	0
12	Nbre impayées	4

(a) Quelle formule doit-on saisir en **B12** pour obtenir le nombre de factures impayées dans cette simulation ?

(b) Recommencer la simulation en utilisant la touche $\boxed{\textbf{F9}}$.
Peut-on obtenir 6 factures impayées ?

3. On réalise la nouvelle feuille de calcul ci-dessous.

   On saisit en **B2** la formule **= ENT(ALEA()+0,15)+ ENT(ALEA()+0,15)+... + ENT(ALEA()+0,15)** (10 fois) et on la recopie jusqu'en **B101**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Simulation N°	Nbre Impayées		X=k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	1		Fréquence	0,23	0,24	0,35	0,15	0,02	0,01	0	0	0	0	0
3	2	1													
4	3	2													

   (a) Quelles valeurs peuvent apparaître dans la plage **B2 :B101** ?
   En déduire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X, égale au nombre de factures impayées parmi 10 factures simulées.

   (b) Pour obtenir les fréquences d'apparition de chacune des valeurs de X, on saisit en **E2** la formule : **= NB.SI(B2 :B101 ;0)/100**.
   Comment peut-on améliorer cette formule afin que l'on puisse la recopier vers la droite ?
   D'après la simulation, quelle semble être la valeur la plus fréquente ?

   (c) Calculer, avec la calculatrice, la probabilité que, parmi 10 factures prises au hasard, aucune ne soit impayée. Comparer avec le résultat obtenu dans la simulation.

   (d) Réaliser d'autres simulations de 100 tirages de 10 factures avec la touche **F9**.

EXERCICE 14.15 (Test d'un produit de beauté)**.**
Une technicienne travaille dans un laboratoire fabriquant des produits de beauté.
Une crème est testée sur 25 personnes et 16 personnes en sont satisfaites. Le laboratoire pense que la probabilité qu'une personne achetant la crème soit satisfaite est 0,64.
La technicienne décide de réaliser 200 simulations pour connaître le nombre moyen de personnes satisfaites parmi un échantillon de 25 personnes prises au hasard, en supposant que chaque personne ait une probabilité de 0,64 d'être satisfaite.
Elle réalise la feuille de calculs sur tableur ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F
1	Probabilité p	0,64				
2	Répétitions n	25		Simulation		Loi binomiale
3				Moyenne		Espérance
4	Simulation N°	Nbre satisfaits				
5	1	15		Écart-type		Écart-type
6	2	18				
7	3	16				

1. (a) Quelle instruction permet de renvoyer 1 avec la probabilité 0,64 et 0 sinon ?

   (b) Quelle instruction à saisir en **B5** permet de simuler parmi 25 personnes le nombre d'entre elles satisfaites avec une probabilité 0,64 pour chacune ?

   (c) Recopier cette formule vers le bas jusqu'en **B204**. On obtient ainsi 200 simulations d'un échantillon de 25 personnes.

   (d) Quelle formule peut-on saisir en **D4** pour calculer la moyenne ?
   Interpréter l'instruction **= ECARTYPEP(B5 :B204)** saisie en **D6**.

2. (a) Calculer l'espérance $E(X)$ en **F4** et l'écart-type $\sigma(X)$ en **F6** de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,64$.

   (b) Effectuer plusieurs simulations avec la touche **F9**.
   Comparer $E(X)$ à la moyenne et $\sigma(X)$ à l'écart-type de la série des 200 valeurs obtenues par simulation en colonne **B**.
   On peut ainsi confirmer les formules de l'espérance et de l'écart-type d'une loi binomiale.