Chapitre 13

Applications de la dérivation

Sommaire

13.1 Étude des variations d'une fonction

13.1.1 Sens de variation

Théorème 13.1. *Soit f une fonction de dérivée f' sur un intervalle I.*

- *Si la dérivée f' est* positive *sur I, alors la fonction f est* croissante *sur I ;*
- *Si la dérivée f' est* négative *sur I, alors la fonction f est* décroissante *sur I ;*
- *Si la dérivée f' est* nulle *sur I, alors la fonction f est* constante *sur I.*

EXERCICE 13.1.
Pour la vente de q objets (en milliers), le bénéfice $B(q)$ (lui aussi en milliers) réalisé par une entreprise est donné par : $B(q) = -q^3 + 6q^2 - 5$ avec $q \in [0;6{,}5]$.

1. Calculer $B'(q)$ et étudier son signe.
2. En déduire le tableau des variations de B sur $[0;6{,}5]$.

Remarque. Dans le tableau de variations, une flèche qui monte (ou qui descend) sur un intervalle I indique que la fonction f est strictement croissante (ou strictement décroissante) sur I.

13.1.2 Extremum d'une fonction

Propriété 13.2. *Soit f une fonction dérivable de dérivée f' sur un intervalle $[a;b]$ et c un réel de I. Si la dérivée f'* s'annule en c en changeant de signe, *alors $f(c)$ est un extremum local de f sur I.*

Supposons qu'on puisse extraire du tableau de variations d'une fonction f une telle configuration :

x	a		c		b
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	$f(c)$	↗	

f admet un minimum local en c qui vaut $f(c)$.

x	a		c		b
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗	$f(c)$	↘	

f admet un maximum local en c qui vaut $f(c)$.

EXERCICE.
On reprend la fonction de l'exercice 13.1.

1. Justifier que la fonction B admet un extremum local sur $[0;6{,}5]$. Donner alors le bénéfice maximal et le bombre d'objets correspondant.

2. À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction B dans une fenêtre adaptée et retrouver ce résultat (commandes **min** ou **max** du menu **G-solv** pour Casio ou **3 : minimum** ou **4 : minimum** du menu **calculs** pour la TI)

13.2 Résolutions d'équations $f(x) = k$

Pour déterminer l'existence de solutions d'une équation de la forme $f(x) = k$ (mais pas forcément leur valeur), on peut utiliser le théorème suivant :

Théorème 13.3. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$.*

- *Si f est strictement croissante sur $[a; b]$ et si $k \in]f(a); f(b)[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α dans $[a; b]$.*

- *Si f est strictement décroissante sur $[a; b]$ et si $k \in]f(b); f(a)[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α dans $[a; b]$.*

Remarque. On peut déterminer un encadrement de α avec le tableau de valeurs de la calculatrice ou avec un algorithme.

EXERCICE.
On reprend la fonction de l'exercice 13.1.

1. Justifier que l'équation $B(q) = 0$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0;6{,}5]$. Avec ka calculatrice, donner la valeur exacte de la plus petite solution et un encadrement d'amplitude 10^{-3} de la plus grande des solutions.

2. En déduire le tableau de signes de la fonction B sur $[0;6{,}5]$ et le nombre d'objets que doit vendre l'entreprise pour réaliser du bénéfice.

3. À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement B sur $[0;6{,}5]$ dans une fenêtre adaptée et retrouver ces résultats (commande **root** du menu **G-solv** pour Casio et commande **2 : zero** du menu **calculs** pour TI).

13.3 Exercices

EXERCICE 13.2.
Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f'(x)$ puis étudier son signe et enfin dresser le tableau des variations de f.

1. f définie sur $[-3;3]$ par $f : x \longmapsto x^2 - 2x - 3$
2. f définie sur $[0;4]$ par $f : x \longmapsto x^3 - 6x^2 + 9x$
3. f définie sur $[0;10]$ par $f : x \longmapsto \frac{2x+1}{x+1}$
4. f définie sur $[-4;4]$ par $f : x \longmapsto \frac{4x}{x^2+x+1}$
5. f définie sur $[1;30]$ par $f : x \longmapsto x + 50\ln(x)$
6. f définie sur $[0;2]$ par $f : x \longmapsto x(\ln(x) - 1)$
7. f définie sur $[0;10]$ par $f : x \longmapsto 2x - \mathrm{e}^x$
8. f définie sur $[-2;2]$ par $f : x \longmapsto \frac{x+1}{\mathrm{e}^x}$

EXERCICE 13.3.
La fonction coût total de fabrication de q tonnes de crème solaire est donnée, en k€, par :

$$C : q \longmapsto q^2 + 5q + 36{,}8 \text{ pour } q \in [0;20]$$

Chaque tonne est vendue 25,4 k€.

1. (a) Calculer $C'(q)$. En déduire le coût marginal de fabrication de 1 kg de crème, après production totale de 10 tonnes.
   (b) Justifier que le coût total est croissant sur $[0;20]$.
2. (a) Exprimer la recette $R(q)$, en k€, en fonction de la quantité produite et vendue q, en tonnes.
   (b) Représenter dans une fenêtre adaptée de la calculatrice les fonctions coût total et recette sur le même graphique. Indiquer la plage de bénéfice.
   (c) Si le prix de vente au kg était de 15 €, peut-on espérer un profit ? Justifier.
3. (a) Justifier que le bénéfice réalisé par la vente de q tonnes, au prix de 25,4 € par kg, est donné par $B : q \longmapsto -q^2 + 20{,}4q - 36{,}8$.
   (b) Résoudre l'équation $B(q) = 0$ et en déduire le signe de $B(q)$.
   (c) Donner alors la plage de bénéfice.

EXERCICE 13.4.
On admet que le revenu fiscal d'un pays est fonction du taux total d'imposition t de ce pays. Un ajustement statique donne la fonction f telle que $f : t \longmapsto 0{,}000344(100t^2 - t^3)$ où t est le taux d'imposition en pourcentage et $f(t)$ est le revenu fiscal total, en pourcentage du PIB du pays.

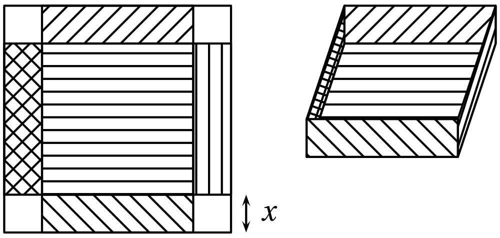
1. Calculer $f(10)$ et interpréter ce résultat dans le contexte.
2. (a) Calculer la dérivée de la fonction f. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0;100]$.
   (b) Montrer que la fonction f admet un maximum.
   (c) Visualiser à la calculatrice, dans une fenêtre adaptée, la courbe de la fonction f et vérifier vos résultats.
   Remarque. Cette courbe est appelée *courbe de* LAFFER.
3. (a) En France, en 2013, le taux total d'imposition est de 51,4 % et le revenu fiscal représente 44,2 %. Le revenu de la France est-il conforme au modèle proposé ?

(b) Si le taux d'imposition augmente de 3 points de pourcentage, quelle est l'évolution du revenu fiscal ?

(c) À partir de la courbe de LAFFER, commenter la phrase : « Trop d'impôt tue l'impôt ».

EXERCICE 13.5.

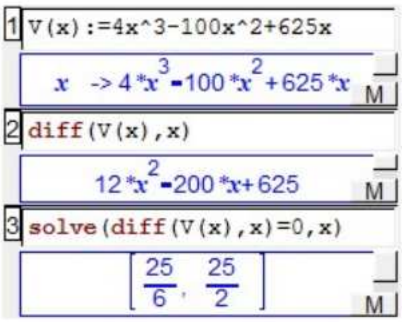
À partir d'un carré de carton de 25 cm de côté, on fabrique une boite sans couvercle. Pour cela on découpe aux quatre coins de la feuille un carré de côté x (en cm), puis on relève les bords. On souhaite déterminer le réel x de l'intervalle $[0\,;12{,}5]$ de sorte à obtenir un volume intérieur de la boîte maximal.



1. (a) Montrer que l'aire du carré de base de la boîte, en fonction de x, est $(25-2x)^2$.

   (b) En déduire que le volume V de la boîte est donné, en fonction de x, par $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 625x$

2. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats ci-dessous, que l'on peut utiliser dans cette question sans les justifier.



   (a) Donner une expression de la dérivée V' de la fonction V.

   (b) Pour quelles valeurs de x a-t-on $V'(x) = 0$?

   (c) Indiquer selon les valeurs de x, le signe de $V'(x)$ sur $[0\,;12{,}5]$.

   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction V sur $[0\,;12{,}5]$.

3. Déduire de la question précédente la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximal.

EXERCICE 13.6.

Soit deux fonctions f et g définies sur $[3\,;8]$ par $f : x \longmapsto \frac{10x}{3x+2}$ et $g : x \longmapsto \frac{2x+40}{3x+2}$

1. Calculer la dérivée de la fonction f et en déduire le sens de variation de f sur $[3\,;8]$.

2. Calculer la dérivée de la fonction g et en déduire le sens de variation de g sur $[3\,;8]$.

3. La fonction f modélise l'offre et la fonction g modélise la demande, en tonnes, d'un produit alimentaire pour un prix x variant de 3 à 8 € par kg.

   (a) Déterminer le priux et la quantité d'équilibre du marché. Calculer alors le chiffre d'affaires.

   (b) À la calculatrice, visualiser dans une fenêtre adaptée, les courbes des fonctions f et g et vérifier vos résultats (commande **isct** du menu **G-solv** pour Casio et **5 : intersection** du menu **calculs** pour TI).

EXERCICE 13.7.

Dans un pays, la consommation $C(r)$ d'un ménage est fonction de son revenu disponible r et on a : $C(r) = \frac{0{,}8r^2+9{,}6r+10}{r+5}$ pour $r \in [10\,;80]$ où r et $C(r)$ sont exprimés en k€.
On assimile la propension marginale à consommer à la dérivée de la fonction de consommation.

1. (a) Montrer que $C'(r) = \frac{0{,}8r^2+8r+38}{(r+5)^2}$.
   (b) Calculer la propensipon marginale à consommer pour un revenu de 20 000 €, puis de 65 000 €.
2. (a) Visualiser à la calculatrice, dans une fenêtre adaptée, la courbe de la fonction C (on remplacera r par x), ainsi que la droite d'équation $y = x$.
   (b) D'après le graphique, pour quelle valeur du revenu le ménage consomme-t-il tout son revenu ?
3. Un logiciel de calcul formel permet de factoriser l'expression $C(r) - r$:

```
1 factor((0.8r^2+9.6r+10)/(r+5)-r)
```

$$-\frac{0.2*(r-25.0)*(r+2.0)}{r+5.0}$$

   (a) Retrouver par le calcul le résultat de la question 2b.
   (b) Calculer alors pour ce niveau de revenu disponible, la propension marginale à consommer.

EXERCICE 13.8.

Soit f la fonction définie sur $[1\,;30]$ par $f : x \longmapsto x + 50 - 18\ln(x)$.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{x-18}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1\,;30]$.
3. En déduire les variations de f sur $[1\,;30]$.
4. Compléter le tableau de valeur de $f(x)$ ci-dessous (arrondir à 10^{-2}).
5. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé d'unités 2 cm pour 1 unité.

x	1	5	10	15	18	20	25	30
$f(x)$								

EXERCICE 13.9.

Soit f la fonction définie sur $I = [0{,}2\,;20]$ par $f : x \longmapsto \frac{2(1+\ln(x))}{x}$

1. Résoudre dans $[0{,}2\,;20]$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
2. On donne ci-dessous le tableau de variations de f sur $[0{,}2\,;20]$:

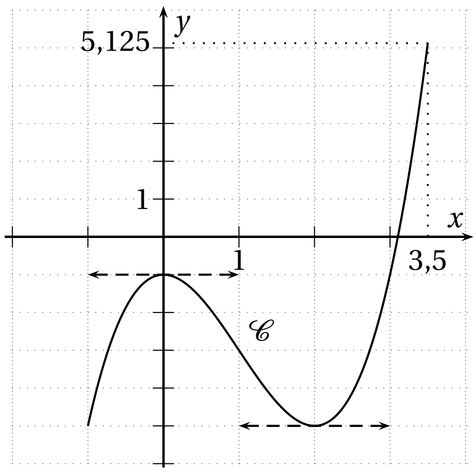
x	0,2		1		20
$f'(x)$		+	0	−	
f	$10(1+\ln(0{,}2))$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{1+\ln(20)}{10}$

   Justifier le sens de variation de f et la valeur obtenue pour le maximum de f.
3. Dans une entreprise, on a modélisé par la fonction f sur l'intervalle $[0{,}2\,;20]$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, éventuellement négatif, réalisé en vendant x milliers d'objets fabriqués.
   (a) Quel nombre minimal d'objets l'entreprise doit-elle vendre mensuellement pour que le bénéfice soit positif ?
   (b) Combien faut-il vendre d'objets pour réaliser le bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

EXERCICE 13.10.
Lors de la fabrication de x centaines de litres d'un produit chimique, le coût total de production, exprimé en k€, est modelisé par la fonction C, définie sur $[0,5\,;\,15]$ par $C : x \longmapsto 0{,}4x\ln(x)+1$. Ce produit est vendu 12 € le litre, soit 1 200 € pour 100 litres.

1. (a) Déterminer l'expression du coût marginal $C'(x)$.
   (b) Résoudre l'équation $C'(x) = 1{,}2$. On note x_0 la solution de cette équation.
2. (a) Déterminer l'expression de la recette $R(x)$.
   (b) En déduire l'expression du bénéfice $B(x)$.
3. (a) Montrer que $B'(x) = 0{,}8 - 0{,}4\ln(x)$.
   (b) Résoudre l'équation $B'(x) = 0$.
   (c) Visualiser à la calculatrice, dans une fentre adaptée, la courbe de la fonction B' et l'utiliser pour dresser le tableau de variation de B sur $[0,5\,;\,15]$.
4. (a) Vérifier que pour une production de x_0 centaines de litres, le bénéfice est maximal.
   (b) Calculer le bénéfice maximal.

EXERCICE 13.11.
Soit f la fonction définie sur $[-1\,;\,3{,}5]$ par $f : x \longmapsto x^3 - 3x^2 - 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.



1. Donner, par lecture graphique, le tableau de variations de f.
2. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2\,;\,3{,}5]$.
   (b) Placer sur le graphique le point A de $\mathscr{C}$ d'abscisse α.
   Déterminer graphiquement un encadrement de α d'amplitude 0,5.
   (c) Compléter avec la calculatrice le tableau donné ci-contre (arrondir à 10^{-2}).
   (d) En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. On donne l'algorithme ci-contre.
   (a) Quelle est la condition de sortie de la boucle ?
   (b) Que représente la variable p et quel est le rôle de cet algorithme ?
   (c) Programmer cet algorithme sur sa calculatrice.
   (d) Quelle valeur de p doit-on saisir en entrée pour retrouver le résultat de la question 2d ?

x	3,10	3,11	3,12	3,13	3,14
$f(x)$					

Entrée
  Saisir p
Initialisation
  $x \leftarrow 2$
  $y \leftarrow -5$
Traitement
  Tant que $y < 0$ faire
    $x \leftarrow x + p$
    $y \leftarrow x^3 - 3x^2 - 1$
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher x

EXERCICE 13.12.
Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet, qu'au bout de x centaines de jours d'exploitation, la production journalière sur ce site, exprimée en milliers de tonnes, est $f(x)$, où f est la fonction définie sur $[0;6]$ par $f(x) = (2x^2 + 3x)\mathrm{e}^{-x}$.

1. (a) Démontrer que, pour tout x de $[0;6]$: $f'(x) = (-2x+3)(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0;6]$.
   (c) Établir le tableau de variation de f sur $[0;6]$.
   On y fera figurer la valeur approchée arrondie à 10^{-2} du maximum de la fonction f.
   (d) Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère prthogonal. On prendre pour unités graphiques : 2 cm et 1 sur l'axe des abscisses et 4 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.
2. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en milliers de tonnes ?
3. Déterminer graphiquement au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière après avoir atteint son maximum sera revenue à 1 000 tonnes.

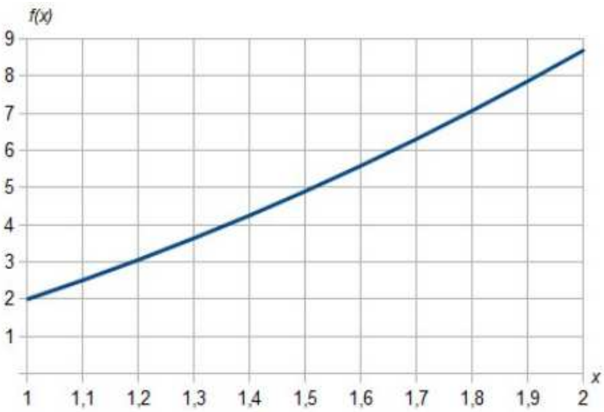
13.4 Travaux dirigés

EXERCICE 13.13.
Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f : x \longmapsto 2x^2 + \ln(x)$.
On donne le tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
f	$\|$	$\nearrow$

1. (a) Calculer, arrondis si nécessaire à 0,1 près, $f(1)$ et $f(2)$.
   (b) Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 3$ possède une unique solution x_0 dans $[1\,;2]$.
2. On souhaite obtenir dans la feuille de calcul d'un tableur la tabulation de la fonction f ainsi qu'une valeur approchée de x_0.

	A	B
1	x	f(x)
2	1	2,00
3	1,1	2,52
4	1,2	3,06
5	1,3	3,64
6	1,4	4,26
7	1,5	4,91
8	1,6	5,59
9	1,7	6,31
10	1,8	7,07
11	1,9	7,86
12	2	8,69



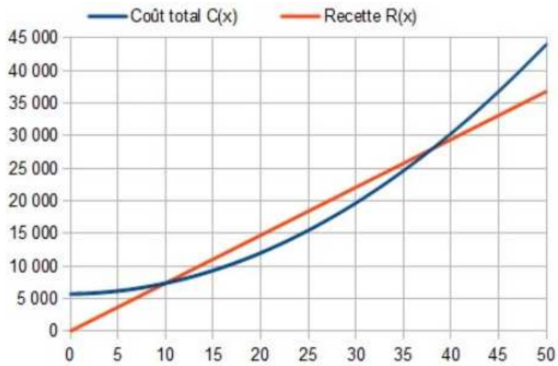
   (a) Quelle formule doit-on saisir en **B2** et recopier vers le bas pour obtenir les valeurs de $f(x)$?
   (b) Sélectionner les colonnes **A** et **B** et insérer un graphique (**dispersion XY**) et représenter f.
   (c) Cliquer en **B4** et utiliser l'outil *Valeur cible* dans l'onglet **Données**, **Analyse de scénarios** et **Valeur cible**. Compléter la boite de dialogue et vérifier la valeur de x_0 obtenue.

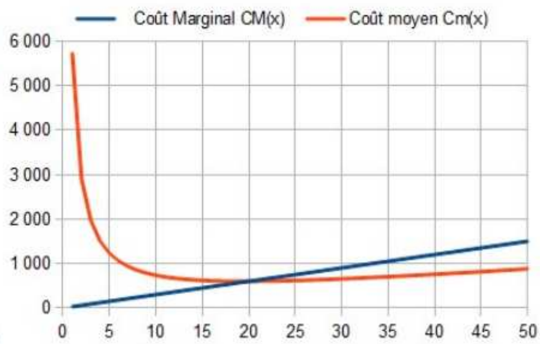
EXERCICE 13.14 (Coût de production et bénéfice)**.**
Une entreprise de matériel électronique et informatique assemble des ordinateurs. Pour x ordinateurs assemblés par jour, le coût de production est donné par $C(x) = 15x^2 + 15x + 5\,700$. L'entreprise peut assembler entre 0 et 50 ordinateurs par jour. Tout ordinateur produit est vendu au prix de 735 € l'unité. On note $R(x)$ la recette et $C_m(x)$ le coût moyen correspondant à la vente de x ordinateurs. On désire étudier le coût de production ainsi que le bénéfice afin d'optimiser la production.

Partie A.
1. (a) Quels sont les coûts fixes ?
   (b) Le coût marginal pour le n-ième ordinateur assemblé est $C_M(n) = C(n) - C(n-1)$. Calculer le coût marginal du 15ᵉ ordinateur assemblé.
   (c) Calculer le coût moyen pour 15 ordinateurs assemblés dans la journée.
2. Recopier le tableau suivant sur tableur. Indiquer les formules à saisir et à recopier vers le bas en **B3**, **C4**, **D4** et **E3**.

	A	B	C	D	E
1	x	Coût total C(x)	Coût Marginal $C_M(x)$	Coût moyen $C_m(x)$	Recette $R(x)$
2	0	5 700			0
3	1	5 730	30	5 730,00	735
4	2	5 790	60	2 895,00	1 470

3. (a) Construire avec le tableur les graphiques suivants :





   (b) Pour quelle quantité produite x_0, le coût marginal est-il égal au coût moyen ?
   (c) Quel est le nombre d'ordinateurs que l'entreprise doit assembler pour que le coût moyen soit minimum ?

4. On donne la propriété suivante :
   « Tant que le coût marginal est inférieur au coût moyen, le coût moyen est ....
   Dès que le coût marginal est supérieur au coût moyen, alors le coût moyen est ....
   Le coût marginal est donc égal au coût moyen, au .... du coût moyen ».
   (a) Compléter les phrases en utilisant les mots *croissante*, *décroissante*, *minimum* ou *maximum*.
   (b) D'après l'un des graphiques précédents, indiquer l'intervalle de production qui vérifie la 2e phrase.

Partie B. 1. (a) Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x.
   (b) D'après le graphique, conjecturer la plage de profit, lorsque le bénéfice est positif ou nul. Expliquer.
   (c) Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.

2. (a) Montrer que le bénéfice admet un maximum pour une quantité x_1.
   Cette quantité est-elle inférieure ou supérieure à x_0 ? Calculer le bénéfice maximal.
   (b) Résoudre algébriquement l'équation $-15x^2 + 720x - 5\,700 = 0$.
   Interpréter concrètement les solutions.

3. Le commercial propose les ordinateurs assemblés par l'entreprise à un centre commercial. L'hypermarché lui fait une offre à 600 € par ordinateur. Pensez-vous que cette offre puisse engendrer un profit pour l'entreprise. Commenter.