Devoir surveillé n°3

EXERCICE 3.1 (6 points).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Il y a une seule réponse correcte parmi les quatre propositions.

Recopier sur sa copie le numéro de la question et indiquer la réponse correcte pour chaque question, sachant qu'une réponse correcte rapporte 1 point, l'absence de réponse, les réponses multiples ou une réponse fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.

Aucune justification n'est demandée.

1. (u_n) est une suite arithmérique telle que $u_2 = 1$ et $u_7 = 3$. Alors la raison r de la suite est :
   (a) $r = \frac{2}{5}$ (b) $r = \frac{1}{5}$ (c) $r = 5$
   (d) impossible à déterminer avec si peu d'informations
2. (u_n) est une suite géométrique telle que $u_1 = 486$ et $u_4 = -144$. Alors la raison q de la suite est :
   (a) $q = \frac{3}{2}$ (b) $q = \frac{2}{3}$ (c) $q = -\frac{2}{3}$ (d) $q = -\frac{3}{2}$
3. La somme $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{30}$ est égale à :
   (a) $-1 + 2^{31}$ (b) $1 - 2^{31}$ (c) $-1 + 2^{30}$ (d) $1 - 2^{30}$
4. La droite d'équation $3x - 5y + 5 = 0$ admet pour vecteur directeur :
   (a) $\overrightarrow{u}\,(3\,;\,-5)$ (b) $\overrightarrow{u}\,(3\,;\,5)$ (c) $\overrightarrow{u}\,(5\,;\,3)$ (d) $\overrightarrow{u}\,(5\,;\,-3)$
5. $\overrightarrow{u}\,(-2\,;\,3)$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$. Alors $\mathscr{D}$ a pour coefficient directeur :
   (a) $m = \frac{2}{3}$ (b) $m = \frac{3}{2}$ (c) $m = -\frac{2}{3}$ (d) $m = -\frac{3}{2}$
6. L'ensemble des points $M\,(x\,;\,y)$ tels que $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 29 = 0$ est :
   (a) Le point $A\,(4\,;\,10)$ (c) Le point $A\,(-2\,;\,-5)$
   (b) Le point $A\,(2\,;\,5)$ (d) L'ensemble vide

EXERCICE 3.2 (5 points).

(u_n) est une suite définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Déterminer les 4 premiers termes de cette suite.
2. On donne l'algorithme ci-dessous, où n est un entier naturel.

Entrée
  Saisir n
Initialisation
  $u \leftarrow 1$
  $s \leftarrow 1$
Traitement
  Pour k allant de 1 à n
    $u \leftarrow \frac{u}{k}$
    $s \leftarrow s + u$
  Fin pour
Sortie
  Afficher s

(a) Compléter le tableau ci-dessous en faisant fonctionner cet algorithme à la main avec $n = 4$:

Valeur de k	Valeur de u	Valeur de s	Affichage

(b) Que fait cet algorithme ?

EXERCICE 3.3 (10 points).
Une entreprise propose, pour recruter un nouvel employé deux types de rémunération :

Type 1 : Salaire annuel de 23 000 € avec une augmentation du salaire annuel de 500 € tous les ans ;

Type 2 : Salaire annuel de 21 000 € avec une augmentation du salaire annuel de 3 % tous les ans.

On cherche à savoir le type de contrat le plus avantageux pour un employé s'il reste 8 ans dans l'entreprise.

1. On note u_n le salaire annuel après n années pour la rémunération de type 1 ; on a alors $u_0 = 23000$ €.
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) Calculer le salaire annuel après sept années avec le contrat de type 1.
   (e) Calculer la somme des salaires annuels après sept années avec le contrat de type 1.
2. On note v_n le salaire annuel après n années pour la rémunération de type 2 ; on a alors $v_0 = 21000$ €.
   (a) Calculer v_1 et v_2.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (d) Calculer le salaire annuel après sept années avec le contrat de type 2. *On arrondira au centime.*
   (e) Calculer la somme des salaires annuels après sept années avec le contrat de type 2. *On arrondira au centime.*
3. Quel est le contrat le plus avantageux pour un employé s'il reste 8 ans dans l'entreprise ?

EXERCICE 3.4 (10 points).
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(7\,;-2)$, $B(5\,;1)$, $C(4\,;-3)$ et $D(2\,;-2)$. On donne également la droite $\mathscr{D}$ d'équation $3x - y = 5$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. (a) Montrer que les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes.
   (b) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}'$ parallèle à la droite $\mathscr{D}$ passant par D.
4. (a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre C et passant par A est :
   $$\mathscr{C} : x^2 + y^2 - 8x + 6y + 15 = 0$$
   (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels du cercle $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
   (c) **Question bonus (hors barème) :** Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

EXERCICE 3.5 (4 points).
$ABCD$ est un parallélogramme de centre E.
F et G sont définis par $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Démontrer que les points E, F et G sont alignés.