

Mathématiques en Première ES

David ROBERT

2007–2008

Sommaire

Progression	1
1 Second degré	3
1.1 Activités	3
1.2 Trinôme	4
1.2.1 Définition, forme développée	4
1.2.2 Forme canonique	4
1.2.3 Racines et discriminant	4
1.2.4 Forme factorisée, signe d'un trinôme	5
1.3 Fonction trinôme	5
1.3.1 Définition	5
1.3.2 Sens de variation	6
1.4 Bilan	6
1.5 Exercices et problèmes	7
1.5.1 Exercices	7
1.5.2 Problèmes	7
Devoir surveillé n°1 : Second degré	9
2 Généralités sur les fonctions	11
2.1 Activités	11
2.2 Rappels sur la notion de fonction	13
2.2.1 Définition, vocabulaire et notations	13
2.2.2 Ensemble de définition	13
2.2.3 Courbe représentative	13
2.3 Comparaison de fonctions	13
2.3.1 Égalité de deux fonctions	14
2.3.2 Comparaison de deux fonctions	14
2.4 Opérations sur les fonctions	14
2.4.1 Opérations algébriques sur les fonctions	14
2.4.2 Fonctions associées	15
2.5 Variations d'une fonction	15
2.5.1 Rappels	15
2.5.2 Variations de $f + g$	15
2.5.3 Variations de $f + k$	15
2.5.4 Variations de kf	15
2.6 Exercices	16
Devoir surveillé n°2 : Généralités sur les fonctions	23
Devoir maison n°1 : Pourcentages	25
3 Pourcentages	27
3.1 Introduction	27
3.1.1 Qu'est-ce qu'un pourcentage?	27
3.1.2 Taux et pourcentage	27
3.2 Techniques de base	28
3.3 Changement d'ensemble de référence	28
3.4 Pourcentage d'évolution	30
3.4.1 Activité	30

3.4.2	Quelques propriétés	30
3.4.3	Exercices	31
3.5	Indices	32
Devoir surveillé n°3 : Pourcentages		35
4	Systèmes d'équations et d'inéquations	37
4.1	Activités	37
4.2	Bilan et compléments	41
4.3	Exercices	42
Devoir surveillé n°4 : Pourcentages – Indices – Systèmes		45
5	Nombre dérivé	47
5.1	Activités	47
5.2	Nombre dérivé	48
5.3	Interprétation graphique du nombre dérivé	48
5.4	Approximation affine d'une fonction	49
5.5	Exercices	50
Devoir surveillé n°5 : Systèmes – Nombre dérivé		53
6	Fonction dérivée	57
6.1	Activités	57
6.2	Fonction dérivée	58
6.3	Fonctions dérivées des fonctions usuelles	58
6.4	Opérations sur les fonctions dérivées	58
6.5	Dérivée des fonctions de la forme $f(x) = g(mx + p)$	59
6.6	Variations d'une fonction	59
6.7	Extremum local	60
6.8	Exercices et problèmes	60
6.8.1	Exercices	60
6.8.2	Problèmes	66
Devoir surveillé n°6 : Fonction dérivée		69

Progression

Mois	Sem	Intitulé du chapitre
Sept	1	Second degré (3 sem)
	2	
	3	Généralités sur les fonctions (3 sem)
	4	
Oct	5	
	6	
	7	Pourcentages (3,5 sem)
	8	
<i>Vacances d'automne du sam 27 oct au jeu 8 nov</i>		
Nov	9 (3 j)	
	10	
	11	Systèmes (2 sem)
	12	
Déc	13	Nombre dérivé (3 sem)
	14	
	15	
<i>Vacances de Noël du sam 22 déc au lun 7 jan</i>		
Jan	16	Quartiles - Écart-type (3 sem)
	17	
	18	Généralités sur les suites (3 sem)
	19	
Fév	20	
	21	
<i>Vacances d'hiver du sam 16 fév au lun 3 mar</i>		
Mars	22	Fonction dérivée (3 sem)
	23	
	24	Probabilités (3 sem)
	25	
Avr	26	
	27	
<i>Vacances de printemps du sam 12 avr au lun 28 avr</i>		
Mai	28	Suites arithmétiques et géométriques (3 sem)
	29	
	30	Comportement asymptotique (3 sem)
	31	
	32	
Jun	33	

Chapitre 1

Second degré

Sommaire

1.1 Activités	3
1.2 Trinôme	4
1.3 Fonction trinôme	5
1.4 Bilan	6
1.5 Exercices et problèmes	7

1.1 Activités

Activité 1.1. 1. Soit f la fonction carré. Dresser le tableau de variation de f et déterminer son minimum et les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x + 3)^2$.

(a) Soit a et b deux réels tels que $-3 \leq a < b$. Compléter :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \leq & a+3 & < & b+3 & & \\ \dots & \dots & (a+3)^2 & \dots & (b+3)^2 & \text{ car } & \dots \end{array}$$

Donc f est sur

(b) En procédant de la même manière, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $] -\infty; -3]$.

(c) Dresser le tableau de variation de f puis en déduire le minimum de la fonction et les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ses variations et dresser son tableau de variation, déterminer son extremum et les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$.

- $f(x) = (x - 1)^2$
- $f(x) = (x + 2)^2 - 1$
- $f(x) = (x - 0,5)^2 + 2$
- $f(x) = 3 - (x + 1)^2$

Activité 1.2. 1. Soit f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 6x + 5$ et $g(x) = (x + 3)^2 - 4$.

(a) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = g(x)$.

(b) En déduire le tableau des variations de f et son extremum.

(c) En déduire les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$ et le signe de f selon les valeurs de x .

2. Mêmes questions avec les fonctions f et g suivantes :

- $f(x) = 2x^2 - x - 1$ et $g(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$
- $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ et $g(x) = -(x - 1)^2 - 3$
- $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

Activité 1.3 (Cas général).

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels. On appellera cette forme, la *forme développée*.

Les activités précédentes ont montré que lorsqu'on pouvait obtenir $f(x)$ sous la forme $f(x) = \alpha(x + \beta)^2 + \gamma$ où α , β et γ sont des réels, alors on pouvait en déduire les variations de f , son extremum, les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ et le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x . On appellera cette forme, la *forme canonique*.

On cherche dans cette activité à obtenir les valeurs de α , β et γ dans le cas général.

1. En développant la forme canonique, montrer que α , β et γ sont les solutions du système :

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = 2\alpha\beta \\ c = \alpha\beta^2 + \gamma \end{cases}$$

2. En déduire que :

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = \frac{b}{2a} \\ \gamma = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

1.2 Trinôme

1.2.1 Définition, forme développée

Définition 1.1. On appelle *trinôme* toute expression qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels et $a \neq 0$. Cette forme s'appelle la *forme développée* du trinôme.

1.2.2 Forme canonique

Théorème 1.1. Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $a(x + \beta)^2 + \gamma$ où α , β et γ sont des réels. Cette forme s'appelle la *forme canonique* du trinôme.

Preuve. L'activité 1.3 a montré que $\alpha = a$, $\beta = \frac{b}{2a}$ et $\gamma = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$. ◇

Remarque. Pour alléger les écritures, et parce que cette quantité aura un rôle important plus tard, on notera : $\Delta = b^2 - 4ac$.

La forme canonique devient alors :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac$$

1.2.3 Racines et discriminant

Définitions 1.2. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$. On appelle :

- *racine* du trinôme tout réel solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;
- *discriminant* du trinôme, noté Δ , le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 1.2. Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme **n'a pas de racine**.
- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme a **une unique racine** : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors le trinôme a **deux racines** : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarques. • Le signe de Δ permet *discriminer* les équations de type $ax^2 + bx + c = 0$ qui ont zéro, une ou deux solutions, c'est la raison pour laquelle on l'appelle le *discriminant*¹.

- Si $\Delta = 0$ les formules permettant d'obtenir x_1 et x_2 donnent $x_1 = x_0$ et $x_2 = x_0$; pour cette raison, on appelle parfois x_0 la *racine double* du trinôme.

Preuve. On a vu que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ donc $(\mathcal{E}) : ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

- Si $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est égal à la somme de deux quantités positives (la seconde strictement) donc $ax^2 + bx + c > 0$ et (\mathcal{E}) n'a pas de solution. Or $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2} < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$.
- Si $-\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ donc $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$. (\mathcal{E}) a une unique solution. Or $-\frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$.
- Si $-\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est de la forme $a(A^2 - B^2)$ donc :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (A^2 - B^2) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)$$

donc deux solutions :

¹Discriminer. *v. tr.* Faire la discrimination, c'est-à-dire l'action de distinguer l'un de l'autre deux objets, ici des équations

$$1. x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}.$$

$$\text{Donc, si } a > 0, x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et, si } a < 0, x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

$$2. x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}.$$

$$\text{Donc, si } a > 0, x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et, si } a < 0, x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Donc, dans tous les cas, \mathcal{E} a deux solutions qui sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Or $-\frac{\Delta}{4a^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0$.

◇

1.2.4 Forme factorisée, signe d'un trinôme

Propriété 1.3. Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme.

- Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2 alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si le trinôme a une racine x_0 alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_0) = a(x - x_0)^2$.
- Si le trinôme n'a pas de racine, il n'a pas de forme factorisée.

Cette écriture, lorsqu'elle existe, est appelée forme factorisée du trinôme.

Preuve. On a obtenu les formes factorisées dans la démonstration précédente.

◇

Propriété 1.4. Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme.

- Si le trinôme n'a pas de racine, $ax^2 + bx + c$ est strictement du signe de a pour tout x .
- Si le trinôme a une racine, $ax^2 + bx + c$ est strictement du signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$ et s'annule en $-\frac{b}{2a}$.
- Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2 , $ax^2 + bx + c$ est :
 - strictement du signe de a quand $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$;
 - strictement du signe opposé de a quand $x \in]x_1; x_2[$;
 - s'annule en x_1 et en x_2 .

On peut aussi énoncer cette propriété de la façon synthétique suivante :

Propriété 1.5. Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les racines, si elles existent.

Preuve. On a vu que $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

- Dans le cas où $\Delta < 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est la somme de deux quantités positives, la seconde strictement, donc le signe de $ax^2 + bx + c$ est strictement celui de a .
- Dans le cas où $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, donc le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a . Plus précisément : il ne s'annule qu'en $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et est sinon strictement du signe de a .
- Dans le cas où $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines. En supposant que $x_1 < x_2$ (sinon il suffit d'inverser les racines), le tableau de signe ci-dessous donne le résultat.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$(x - x_1)$		–	0	+
$(x - x_2)$		–	–	0
$(x - x_1)(x - x_2)$		+	0	–
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$

◇

1.3 Fonction trinôme

1.3.1 Définition

Définition 1.3. On appelle *fonction trinôme* une fonction f , définie sur \mathbb{R} , qui à x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

1.3.2 Sens de variation

Propriété 1.6. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :

• Si $a > 0$:

• Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

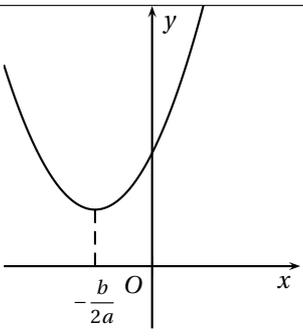
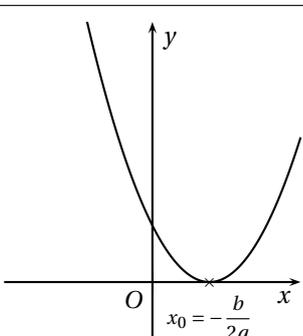
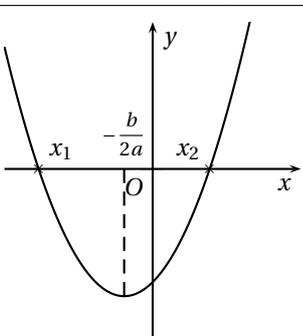
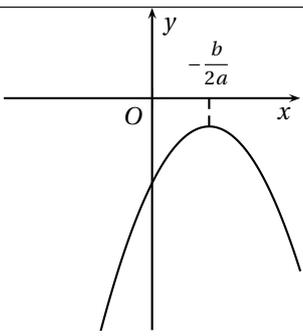
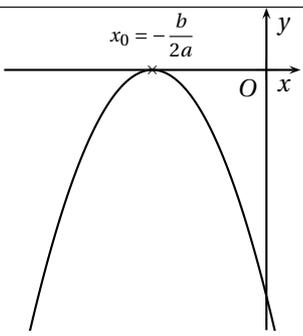
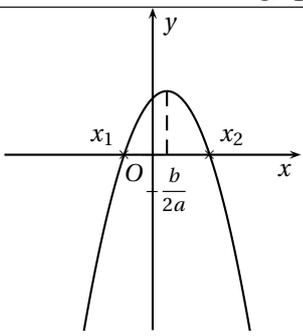
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Preuve. La preuve sera admise dans le cas général même si elle est du même type que les cas particuliers déjà vus dans les activités. ◇

1.4 Bilan

Un bilan des principales propriétés vous est proposé sous forme de tableau de la présente page.

TAB. 1.1 – Bilan du second degré

		$\Delta = b^2 - 4ac$		
		$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
		$ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R}	$ax^2 + bx + c = 0$ a une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	$ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
		$ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine	$ax^2 + bx + c$ a une racine double	$ax^2 + bx + c$ a deux racines
		Aucune factorisation	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Si $a > 0$				
		$ax^2 + bx + c > 0$ sur \mathbb{R}	$ax^2 + bx + c \geq 0$ sur \mathbb{R}	$ax^2 + bx + c \geq 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $ax^2 + bx + c \leq 0$ sur $[x_1; x_2]$
Si $a < 0$				
		$ax^2 + bx + c < 0$ sur \mathbb{R}	$ax^2 + bx + c \leq 0$ sur \mathbb{R}	$ax^2 + bx + c \leq 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $ax^2 + bx + c \geq 0$ sur $[x_1; x_2]$

1.5 Exercices et problèmes

1.5.1 Exercices

Exercice 1.1.

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $x^2 = 9$;
- $x^2 = -3$;
- $(x-5)^2 = 3$;
- $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$;
- $(3x+5)^2 = (x+1)^2$;
- $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$.

Exercice 1.2.

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $4x^2 - x - 3 = 0$;
- $(t+1)^2 + 3 = 0$;
- $2(2x+1)^2 - (2x+1) - 6 = 0$;
- $x^2 + 10^{50}x + 25 \times 10^{98} = 0$.

Exercice 1.3.

Résoudre les équations suivantes :

- $x^2 = \frac{1}{2}$
- $x^2 = \frac{1}{3}$.
- $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Exercice 1.4.

Résoudre l'équation $2004x^4 + x^2 - 2005 = 0$.

Exercice 1.5.

On note $P(x) = -2x^2 + 7x - 5$.

1. Résoudre $P(x) = 0$.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Résoudre $P(x) \leq 0$.

Exercice 1.6.

Résoudre les équations suivantes :

- $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$
- $\frac{x^2-x+1}{x+2} = 2x+3$

Exercice 1.7.

Résoudre les inéquations suivantes :

- $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$;
- $-x^2 + 9x + 22 \geq 0$;
- $\frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 10} > 0$.

Exercice 1.8.

Soit f la fonction polynôme définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 13x + 15$.

1. Montrer que $x = -1$ est racine de ce polynôme.
2. Déterminer trois réels a , b et c tels que $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.
3. (a) Terminer la factorisation de $f(x)$.
(b) Résolvez l'inéquation $f(x) > 0$.

1.5.2 Problèmes

Problème 1.1.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Précisez la nature de la courbe \mathcal{C} et les coordonnées de son sommet S .
2. Montrer que la courbe \mathcal{C} coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
3. Pour quelles valeurs de x la courbe \mathcal{C} est-elle située au dessus de l'axe des abscisses ?

Problème 1.2.

Une entreprise produit de la farine de blé.

On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.

On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q .
2. Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
(a) déterminer la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable ;
(b) la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

Problème 1.3.

Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisément on a : $x = 300 - 12p$.

1. Entre quelles valeurs peut varier le prix du billet ?
2. Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1848 €, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1848$.
3. En déduire pour quelles valeurs de p le séance est rentable.
4. Déterminer le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

Problème 1.4.

Une mutuelle complémentaire propose à ses adhérents le mode de remboursement suivant : lorsque la sécurité sociale a remboursé $t\%$ des frais de maladie, la mutuelle rembourse à l'adhérent $t\%$ de ce qui reste à sa charge .

Madame Martin, sur l'une de ses feuilles de remboursement de frais, constate que le taux global de remboursement de ses frais est 87.75%. Quel est le taux de remboursement de la sécurité sociale ?

Problème 1.5.

Une société de livres par correspondance a actuellement 10000 abonnés qui paient chacun 50 € par an. Une étude a montré qu'une augmentation (respectivement une diminution) de 1 € du prix de l'abonnement annuel, entraîne une diminution (respectivement une augmentation) de 100 abonnés.

On se propose de trouver comment modifier le prix de l'abonnement annuel pour obtenir le maximum de recette.

n désigne la variation du prix de l'abonnement annuel en euros (n est un entier relatif).

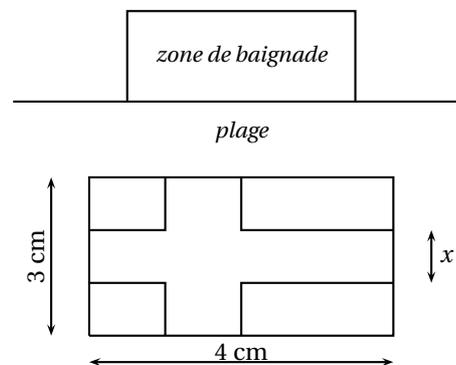
1. Exprimer en fonction de n le prix de l'abonnement annuel, et le nombre d'abonnés correspondant.
2. Exprimer en fonction de n la recette annuelle de cette société, notée $R(n)$.
3. Déterminer la valeur de n pour laquelle $R(n)$ est maximum.
Quel est alors le montant de l'abonnement annuel, le nombre d'abonnés et la recette totale correspondante ?

Problème 1.6.

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

Problème 1.7.

Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?



Problème 1.8.

Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?

Devoir surveillé n°1

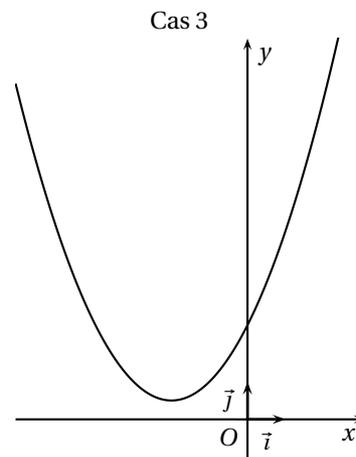
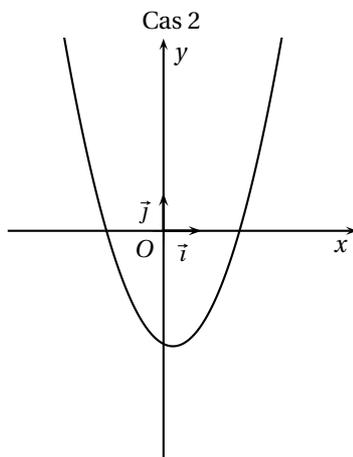
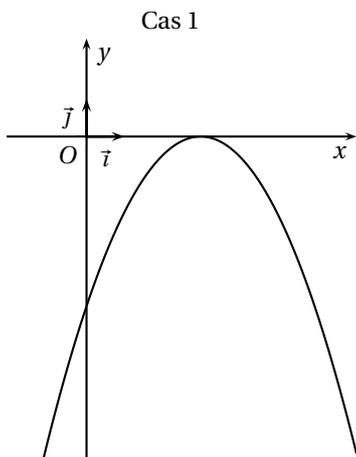
Second degré

EXERCICE 1

3 points

On donne ci-dessous les représentations graphiques de trois fonctions du second degré f définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dans chacun des cas, indiquer le signe de a , le nombre de racines et si le discriminant Δ du trinôme est strictement positif, strictement négatif ou nul.



EXERCICE 2

5 points

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- $x^2 - 7x = 7x^2 + 2$

- $x^2 + 2x - 2 = 0$

- $(x - 3)(x + 2) = 5x - 16$

EXERCICE 3

5 points

On cherche à résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 3x + 4} \leq 0$

1. Étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$ selon les valeurs de x .

2. Étudier le signe de $-x^2 + 3x + 4$ selon les valeurs de x .

3. À l'aide d'un tableau de signe, étudier le signe de $\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ selon les valeurs de x et conclure.

EXERCICE 4

7 points

On s'intéresse à la production mensuelle d'une certaine catégories d'articles par une entreprise E. On sait que le nombre d'articles produits par mois est compris entre 0 et 500. On suppose que le coût total, exprimé en **milliers d'euros**, peut être modélisé par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par

$$C_T(x) = 0,75x^2 + 3x + 4$$

où x représente le nombre de **centaines** d'articles fabriqués.

1. Déterminer le coût total de production, en milliers d'euros, pour une production mensuelle de :

- 100 articles ;

- 300 articles ;

- 500 articles.

2. Déterminer s'il existe x tel que le coût total soit nul.

3. Déterminer le montant des charges fixes.

4. Chaque centaine d'articles est vendue 7 000 €. La recette totale pour x centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R_T(x) = 7x$ en milliers d'euros.

Déterminer :

(a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x (à un article près) pour que la production de l'entreprise E soit rentable ;

(b) expliquer pourquoi il existe un x_0 pour lequel le bénéfice est maximal ;

(c) déterminer combien valent x_0 et le bénéfice maximal.

Chapitre 2

Généralités sur les fonctions

Sommaire

2.1 Activités	11
2.2 Rappels sur la notion de fonction	13
2.3 Comparaison de fonctions	13
2.4 Opérations sur les fonctions	14
2.5 Variations d'une fonction	15
2.6 Exercices	16

2.1 Activités

Activité 2.1 (Fonctions de référence (rappels)).

Compléter le tableau 2.1, page suivante, sur le modèle de la deuxième ligne.

Activité 2.2 (La fonction racine).

On appelle *fonction racine* la fonction qui à un réel x associe, s'il existe, le réel positif noté \sqrt{x} tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

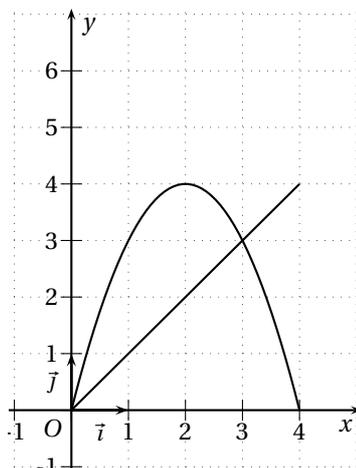
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction racine.
2. Montrer que si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Que peut-on en déduire ?
3. Tracer la courbe représentative de la fonction racine.

Activité 2.3 (Sommes de fonctions). 1. (a) Sur le graphique 2.1 de la présente page, tracer la courbe représentant la fonction f , somme des deux fonctions déjà représentées.

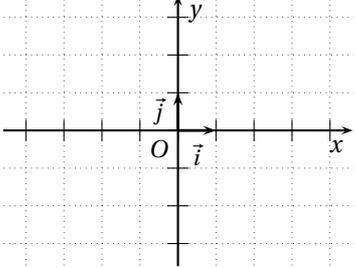
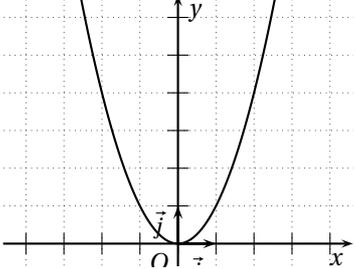
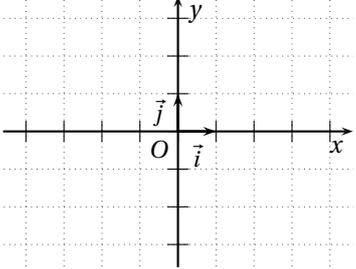
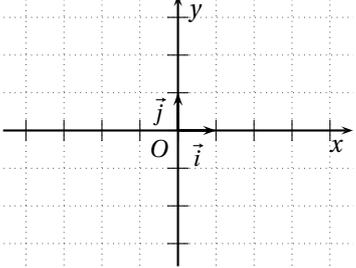
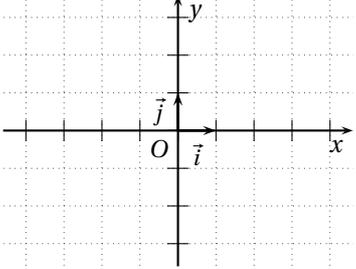
(b) Donner, par lecture graphique, les variations de la fonction f .

(c) Y a-t-il un lien entre les variations des deux fonctions représentées et celles de f ?

FIG. 2.1 – Graphique de l'activité 2.3



TAB. 2.1 – Fonctions de référence - Tableau de l'activité 2.1

Fonction Définie sur	Variations	Allure de la courbe représentative								
Affine $f(x) =$ $D_f =$										
Carré $f(x) = x^2$ $D_f = \mathbb{R}$	<table border="1" data-bbox="424 871 874 1003"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f(x) = x^2$</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">↘ 0 ↗</td> <td></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x) = x^2$	↘ 0 ↗			 <p style="text-align: center;">Parabole</p>
x	$-\infty$	0	$+\infty$							
$f(x) = x^2$	↘ 0 ↗									
Cube $f(x) =$ $D_f =$										
Inverse $f(x) =$ $D_f =$										
Valeur absolue $f(x) =$ $D_f =$										

2. (a) À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur tracer les courbes représentatives des fonctions f et g (définies sur \mathbb{R}) ci-dessous puis de la fonction h , somme de ces deux fonctions et relever par lecture graphique les sens de variation de chacune de ces fonctions :
- $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x - 4$;
 - $f(x) = -2x + 4$ et $g(x) = x + 1$;
 - $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = 2x - 4$;
 - $f(x) = -3x + 2$ et $g(x) = x - 4$;
 - $f(x) = -x + 4$ et $g(x) = -2x + 3$.
- (b) Même question avec les fonctions f et g suivantes et la fonction h , somme de ces deux fonctions :
- $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = x + 1$;
 - pour $x \neq 0$, $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$;
 - $f(x) = -x^3$ et $g(x) = -x + 2$;
 - pour $x \neq -2$, $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$.
- (c) Conjecturer le lien qu'il existe entre les variations de f et g et celles de h puis le prouver.

Activité 2.4 (Fonctions associées).

Soit f , g , h , k , l les fonctions définies par :

- $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $g(x) = 3 + \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $h(x) = \sqrt{x+4}$ pour $x \in [-4; +\infty[$
- $k(x) = -\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $l(x) = 4\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

1. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur, tracer la courbe représentative de f puis celle de g .
2. Décrire la transformation permettant de passer de la courbe de f à celle de g en précisant ses caractéristiques si cette transformation est une transformation usuelle (symétrie, etc.).
3. Mêmes questions en remplaçant g par chacune des autres fonctions.

2.2 Rappels sur la notion de fonction

Les définitions et propriétés suivantes ont été vues en Seconde aussi les propriétés ne seront pas démontrées.

2.2.1 Définition, vocabulaire et notations

Définition 2.1. Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} .

Définir une fonction f sur un ensemble D , c'est associer, à chaque réel $x \in D$, au plus un réel noté $f(x)$.

On dit que $f(x)$ est l'*image* de x par f et que x est un *antécédent* de $f(x)$.

On note :

$$\begin{array}{l} f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

et on lit « f , la fonction de D dans \mathbb{R} qui à x associe $f(x)$ ».

Remarque. f désigne la fonction, $f(x)$ désigne le réel qui est l'image de x par f .

2.2.2 Ensemble de définition

Définition 2.2. L'ensemble des réels possédant une image par une fonction est appelé *ensemble de définition* de la fonction. On le note en général D_f .

On le détermine par le calcul. À notre niveau les seuls problèmes de définition portent sur les fonctions comportant la variable x au dénominateur ou sous une racine.

2.2.3 Courbe représentative

Définition 2.3. Dans un repère, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$ où x décrit D_f est appelé *courbe représentative* (ou représentation graphique) de la fonction f . On la note en général \mathcal{C}_f .

On dit que la courbe \mathcal{C}_f a pour équation $y = f(x)$.

On veillera à ne pas confondre la fonction et sa représentation graphique.

2.3 Comparaison de fonctions

Comparer deux fonctions f et g c'est déterminer si $f(x) = g(x)$ pour tout x et, sinon, sur quel(s) intervalle(s) on a $f(x) > g(x)$ et $f(x) < g(x)$.

2.3.1 Égalité de deux fonctions

Définition 2.4. Soit f et g deux fonctions. On dit que f et g sont égales si :

- f et g ont même ensemble de définition D ;
- pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$.

On note alors $f = g$.

2.3.2 Comparaison de deux fonctions

Cas général

Définition 2.5. Soit D une partie de \mathbb{R} et f et g deux fonctions définies au moins sur D . On dit que f est *inférieure à* g sur D lorsque $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$.

On note $f \leq g$ sur D .

Remarque. On dit parfois que f est majorée par g sur D ou que g est minorée par f sur D .

Les conséquences graphiques sont les suivantes :

Propriété 2.1. Soient f et g deux fonctions définies au moins sur D , \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g leurs courbes respectives. Alors si $f \leq g$ sur D , \mathcal{C}_f est au-dessous de \mathcal{C}_g .

Preuve. Immédiat. ◇

Cas particulier – Fonction majorée, minorée, bornée

Dans les cas où l'une des deux fonctions est constante (ici $g(x) = m$) on a :

Définition 2.6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

- f est *minorée sur* I s'il existe un réel m tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$. m est un minorant de f sur I ;
- f est *majorée sur* I s'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$. M est un majorant de f sur I ;
- f est *bornée sur* I si elle est majorée et minorée sur I .

La représentation graphique de f est alors :

- au-dessus de la droite d'équation $y = m$ si elle est minorée par m ;
- au-dessous de la droite d'équation $y = M$ si elle est majorée par M ;
- dans une bande horizontale délimitée par les droites d'équation $y = m$ et $y = M$ si elle est bornée par m et M .

2.4 Opérations sur les fonctions

2.4.1 Opérations algébriques sur les fonctions

De la même manière qu'on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des nombres, on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des fonctions.

Définition 2.7. Soit f et g deux fonctions définies au moins sur D et k un réel. Le tableau suivant regroupe les opérations sur les fonctions f et g :

Opération	Notation	Définition	Définie pour
Somme de la fonction f et du réel k	$f + k$	$(f + k)(x) = f(x) + k$	$x \in D_f$
Produit de la fonction f et du réel k	kf	$(kf)(x) = kf(x)$	
Somme des fonctions f et g	$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
Différence des fonctions f et g	$f - g$	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	
Produit des fonctions f et g	fg	$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$	
Quotient des fonctions f et g	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$

2.4.2 Fonctions associées

Définition 2.8. Soit f une fonction définie sur D et k un réel.

On appelle fonctions associées à f les fonctions : $x \mapsto f(x) + k$ $x \mapsto f(x + k)$ $x \mapsto kf(x)$

Remarque. Ces fonctions ne sont en général pas définies sur le même ensemble de définition que f .

Propriété 2.2. Soit f une fonction définie sur D et k un réel.

- La courbe de $f + k$ s'obtient à partir de celle de f par une translation de vecteur $\vec{u}(0; k)$
- La courbe de $x \mapsto f(x + k)$ s'obtient à partir de celle de f par une translation de vecteur $\vec{u}(-k; 0)$
- Dans un repère orthogonal, la courbe de $-f$ s'obtient à partir de celle de f par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses

On l'admettra.

2.5 Variations d'une fonction

2.5.1 Rappels

Définition 2.9. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que

- f est *croissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$;
- f est *décroissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$;
- f est *monotone sur I* si f ne change pas de sens de variation sur I .

Remarque. On obtient les définitions de strictement croissante ou décroissante en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

2.5.2 Variations de $f + g$

Propriété 2.3. Soit deux fonctions f et g définies au moins sur un ensemble D .

- Si f et g sont deux fonctions croissantes sur D , alors la fonction $f + g$ est croissante sur D .
- Si f et g sont deux fonctions décroissantes sur D , alors la fonction $f + g$ est décroissante sur D .

Preuve. Voir l'exercice 2.5

◇

2.5.3 Variations de $f + k$

Propriété 2.4. Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et k un réel. Les fonctions f et $f + k$ ont même sens de variation sur I .

Preuve. Si f est croissante et $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$. Donc $f(a) + k \leq f(b) + k$ donc $f + k$ est aussi croissante. On démontre de la même manière si f est décroissante.

◇

Exemple 2.1. La fonction $f : x \mapsto x^2 + 2$ a les mêmes variations que la fonction carrée.

2.5.4 Variations de kf

Propriété 2.5. Soit f une fonction définie et monotone sur D .

- Si $k > 0$ alors les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur D .
- Si $k < 0$ alors les fonctions f et kf ont des sens de variation opposés sur D .

Preuve. Voir l'exercice 2.6

◇

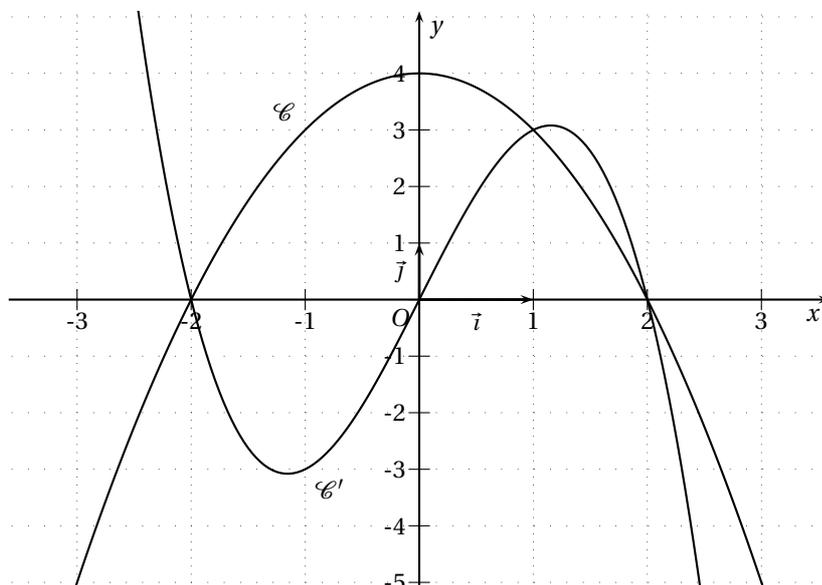
2.6 Exercices

Exercice 2.1.

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = -x^3 + 4x$ et $g(x) = -x^2 + 4$.

On a tracé sur le graphique 2.2 de la présente page les courbes représentatives de f et de g .

FIG. 2.2 – Graphique de l'exercice 2.1



- Associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente. Justifier succinctement.
- Déterminer graphiquement puis par le calcul les solutions des équations :
 - $f(x) = 0$;
 - $g(x) = 0$;
- (a) Résoudre graphiquement : $f(x) \leq g(x)$.
(b) En factorisant d'abord f résoudre par le calcul $f(x) \leq g(x)$.

Exercice 2.2.

Soit f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

- Étudier le signe de $f(x) - g(x) = x - x^2$.
- En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \leq g$.

Exercice 2.3.

Soient f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- Calculer $f(x) - g(x)$ (réduire au même dénominateur).
- En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \leq g$.

Exercice 2.4.

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x(1-x)$.

En étudiant le signe de $\frac{1}{4} - f(x)$, montrer que f est majorée sur \mathbb{R} par $\frac{1}{4}$.

- Exercice 2.5 (Preuve de la propriété 2.3).
- Montrer que si a et b sont deux nombres de D tels que $a < b$ et que f et g sont croissantes sur D , alors $(f+g)(a) \leq (f+g)(b)$. Conclure.
 - Mêmes questions lorsque f et g sont décroissantes sur D .

Exercice 2.6 (Preuve de la propriété 2.5).

Montrer que :

- si a et b sont deux nombres de D tels que $a < b$
- si f croissante sur D
- et si $k < 0$

alors $kf(a) \geq kf(b)$.

Conclure.

Exercice 2.7. 1. Donner une décomposition de la fonction f définie par $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ qui permette d'en déduire son sens de variation sur l'intervalle $] -\infty; 3]$ et décrire simplement comment obtenir la courbe représentative de f à partir de celle d'une fonction de référence.

2. Mêmes questions pour les fonctions suivantes :

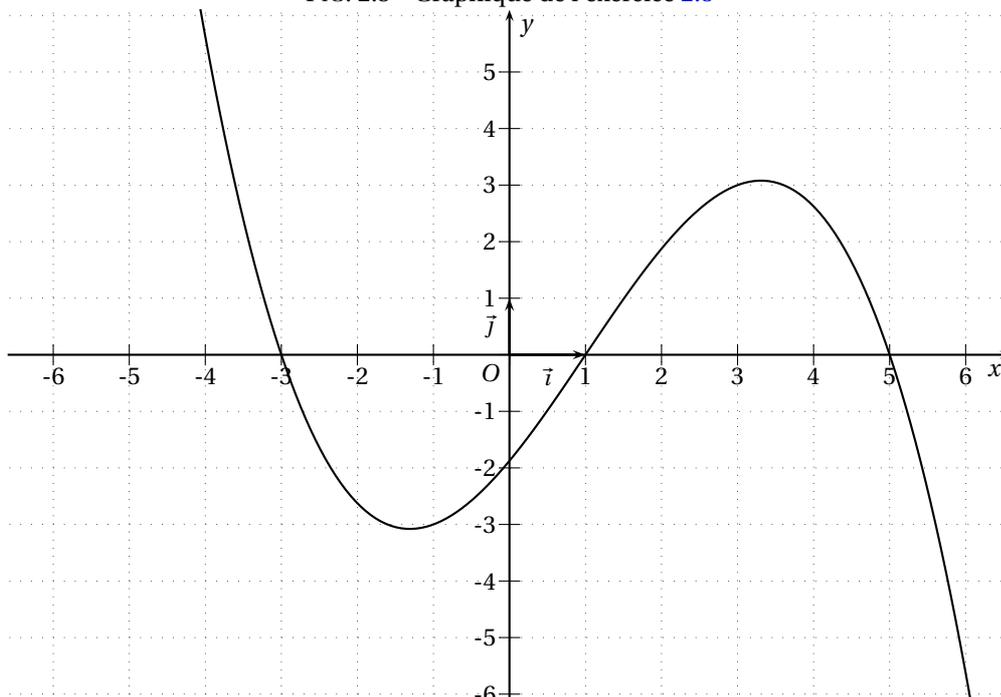
- $f(x) = \frac{2}{x-1}$;
- $f(x) = 3 - (x+1)^2$;
- $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$;
- $f(x) = (x+1)^3 - 1$;
- $f(x) = 3 + \frac{1}{2+x}$;
- $f(x) = -3\sqrt{x+1}$.

Exercice 2.8.

On a représenté sur la figure 2.3 de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur \mathbb{R} . Y tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $u = f + 2$;
- $v = -2f$;
- $w(x) = f(x + 3)$;
- $z = |f|$.

FIG. 2.3 – Graphique de l'exercice 2.8



Exercice 2.9.

Soient f et g les fonctions définies par :

- $f(x) = \frac{2x+1}{x}$;
- $g(x) = \frac{2x-9}{x-4}$.

1. Quels sont leurs ensembles de définition ?
2. Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x :

- $f(x) = a + \frac{b}{x}$;
- $g(x) = c + \frac{d}{x-4}$.

3. En déduire les tableaux de variations de ces deux fonctions.
4. (a) Vérifier que, pour tout réel t : $f(2+t) = g(2-t)$.
(b) Que peut-on en déduire pour leurs représentations graphiques ?

Exercice 2.10.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 3}$. On appelle \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x , $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$.
2. Soit \mathcal{D} la droite représentative de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2x + 1$. On pose $d(x) = f(x) - g(x)$.
(a) Étudier le signe de $d(x)$ selon les valeurs de x .
(b) En déduire la position de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{D} .

Exercice 2.11.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Étudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .
3. Déterminer la position de la courbe de g par rapport à la droite d'équation $y = 1$ selon les valeurs de x .

Exercice 2.12. 1. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{-4}{x+1}$.

À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de g et son ensemble de définition.

2. On considère la fonction f définie sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$.

Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f .
4. On appelle \mathcal{C} la représentation graphique de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} avec chacun des axes du repère.
 - (b) Placer les points trouvés aux questions précédentes dans un repère et tracer soigneusement \mathcal{C} .

Exercice 2.13.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 4}{x - 2}$. On appelle \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout réel x , $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.
 (b) En déduire les variations de f .
2. Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à la droite d'équation $y = -x + 3$ selon les valeurs de x .
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} avec les axes de coordonnées.
4. Placer les points et les droites rencontrés dans les questions précédentes dans un même repère et y tracer \mathcal{C} .

Exercice 2.14 (Exercice type corrigé).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}$. On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.

$$f(x) = \frac{(ax + b)(x - 2)}{x - 2} + \frac{c}{x - 2} = \frac{ax^2 - 2ax + bx - 2b + c}{x - 2} = \frac{ax^2 + (-2a + b)x - 2b + c}{x - 2}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 2 \\ -2a + b = -3 \\ -2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Donc $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x - 2}$

2. En déduire les variations de f .

On a $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x - 2} = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = -\frac{1}{x - 2}$.
 $u(x) = 2x + 1$ est une fonction affine croissante sur $] -\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.
 $v(x) = -\frac{1}{x - 2}$ est une fonction associée à la fonction inverse or on sait que :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		\parallel	

donc, d'après les propriétés des fonctions associées :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\frac{1}{x - 2}$		\parallel	

et donc

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-\frac{1}{x - 2}$		\parallel	

f est donc la somme de deux fonctions croissantes sur $] -\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$, elle est donc croissante sur $] -\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} avec les axes de coordonnées.

• *Intersection avec (Oy)*

On a $x = 0$ et $y = f(0) = \frac{-3}{-2} = 1,5$ donc A (0; 1,5) est l'intersection de \mathcal{C} avec (Oy).

• *Intersection avec (Ox)*

On cherche x tel que $y = f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3 = 0$ et $x - 2 \neq 0$.

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-3) = 33 > 0$ donc deux racines : $x = \frac{3 + \sqrt{33}}{4}$ ou $x = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}$.

Donc B $\left(\frac{3 + \sqrt{33}}{4}; 0\right)$ et C $\left(\frac{3 - \sqrt{33}}{4}; 0\right)$ sont les intersections de \mathcal{C} avec (Ox).

4. Déterminer les positions relatives de \mathcal{C} et de l'axe des abscisses.

On cherche sur quels intervalles \mathcal{C} est au-dessus de l'axe et sur quels intervalles elle est en-dessous. Cela revient à étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

Comme $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}$, on va donc étudier le signe du numérateur et du dénominateur et faire un tableau de signes.

- *Numérateur*

C'est un trinôme, donc du signe du coefficient de x^2 sauf entre les racines qu'on a déjà trouvées dans la question précédente.

- *Dénominateur*

C'est une expression affine croissante.

- *Tableau de signes*

x	$-\infty$	$\frac{3 - \sqrt{33}}{4}$	2	$\frac{3 + \sqrt{33}}{4}$	$+\infty$		
$2x^2 - 3x - 3$	+	0	-	-	0	+	
$x - 2$	-	-	0	+	+	+	
$f(x)$	-	0	+		-	0	+

Donc \mathcal{C} est au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left[\frac{3 - \sqrt{33}}{4}; 2 \right[\cup \left[\frac{3 + \sqrt{33}}{4}; +\infty \right[$ et au-dessous sur $\left] -\infty; \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \right] \cup \left] 2; \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \right[$.

5. Déterminer les positions relatives de \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} d'équation $y = 2x + 1$ selon les valeurs de x .

On va étudier le signe de $f(x) - (2x + 1)$.

$$f(x) - (2x + 1) = 2x + 1 - \frac{1}{x - 2} - (2x + 1) = -\frac{1}{x - 2}. \text{ Or :}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	0	+
$-\frac{1}{x - 2}$	+		-

Finalemment :

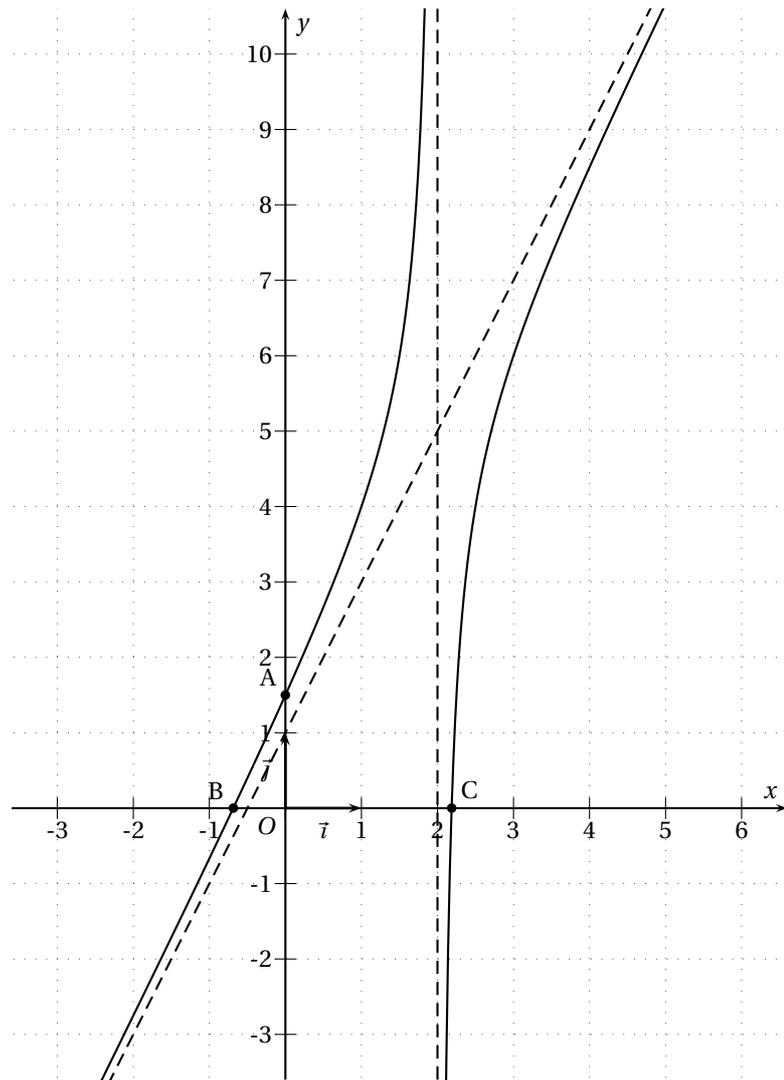
- Quand $x < 2$:

$$f(x) - (2x + 1) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x + 1 \Leftrightarrow \mathcal{C} > \mathcal{D}$$

- Quand $x > 2$:

$$f(x) - (2x + 1) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 2x + 1 \Leftrightarrow \mathcal{C} < \mathcal{D}$$

6. Placer dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points rencontrés dans les questions précédentes, tracer la droite \mathcal{D} puis la courbe \mathcal{C} .



Devoir surveillé n°2

Généralités sur les fonctions

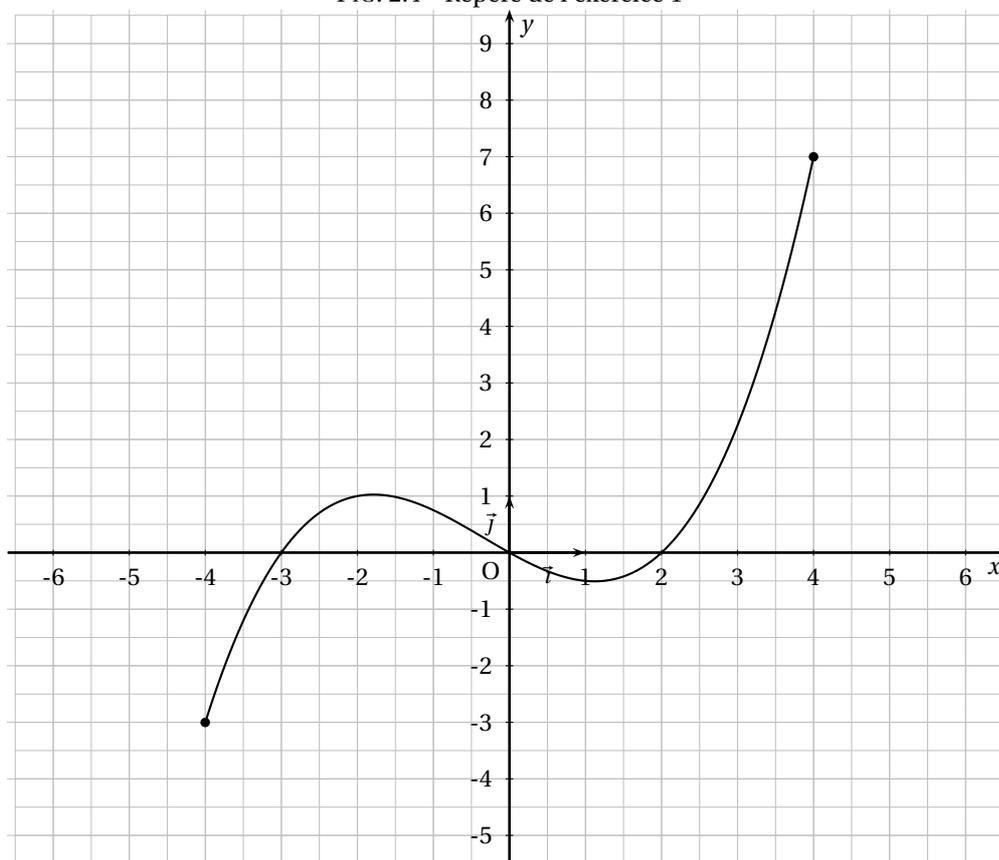
EXERCICE 1

4,5 points

On a représenté sur la figure de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur $[-4; 4]$.
Tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $u = f + 2$;
- $v = -f$;
- $w(x) = f(x + 2)$.

FIG. 2.4 – Repère de l'exercice 1



EXERCICE 2

6 points

Déterminer les sens de variations des fonctions suivantes en indiquant les propriétés utilisées :

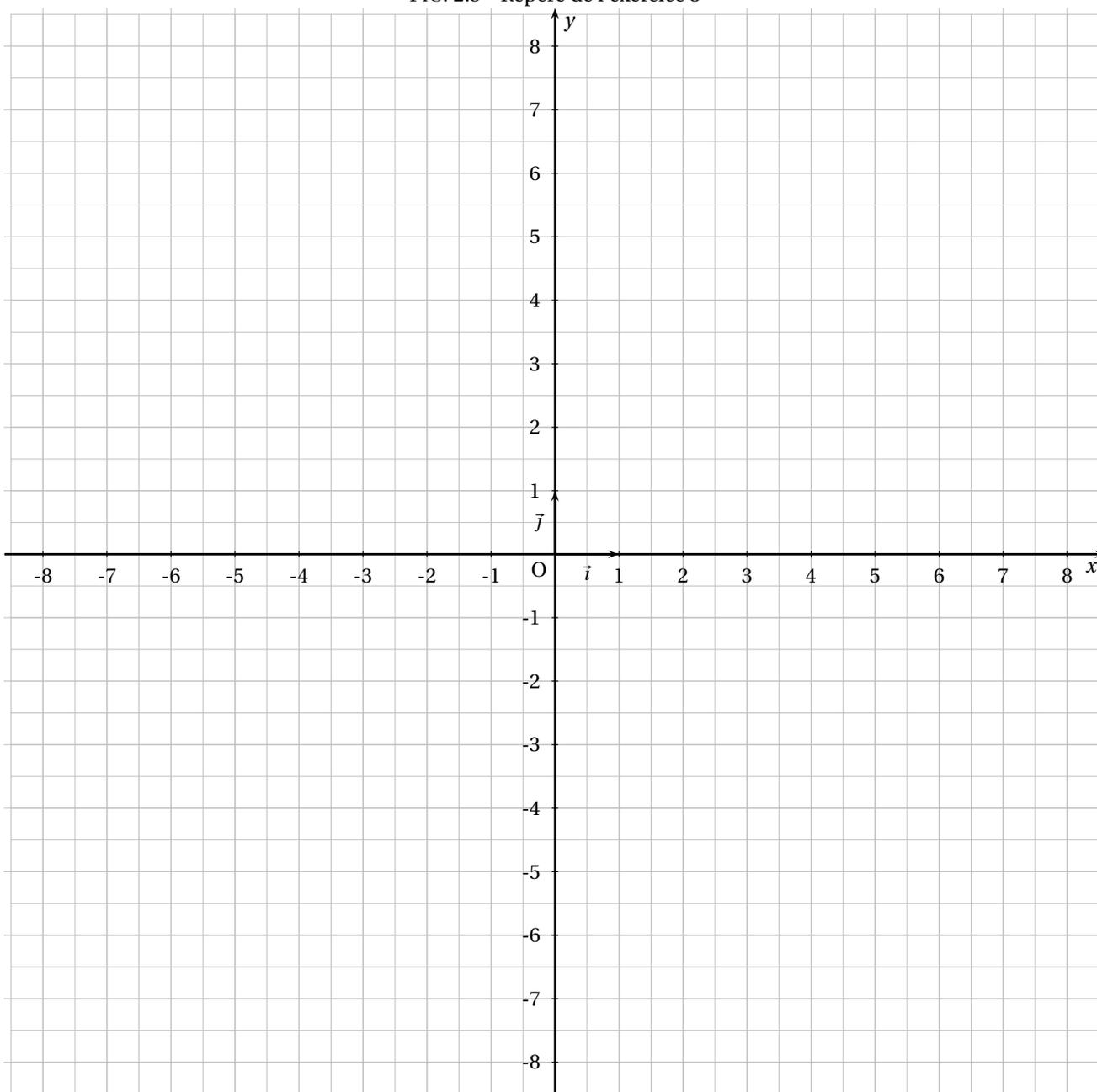
1. $f(x) = 5x + 3 - x^2$ sur $] -\infty; 0]$;
2. $g(x) = 2\sqrt{x} + 3$ sur $[0; +\infty[$;
3. $h(x) = 3 + \frac{1}{2+x}$ sur $] -2; +\infty[$.

EXERCICE 3

9,5 points

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $g(x) = -\frac{3}{x-2}$.
À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de g .
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 2}$.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = x - 4 - \frac{3}{x - 2}$.
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de f .
4. On appelle \mathcal{C} la représentation graphique de f .
 - (a) Déterminer les coordonnées des points intersections de \mathcal{C} avec les axes de coordonnées.
 - (b) Déterminer les positions relatives de \mathcal{C} et de l'axe des abscisses selon les valeurs de x .
 - (c) Déterminer les positions relatives de \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} d'équation $y = x - 4$ selon les valeurs de x .
 - (d) Dans le repère page suivante, placer les points rencontrés dans les questions précédentes, tracer \mathcal{D} puis \mathcal{C} .

FIG. 2.5 - Repère de l'exercice 3



Devoir maison n°1

Pourcentages

L'objet du devoir maison est d'évaluer si, pour les Premières générales à Dupuy de Lôme de 2 004–2 005, il y avait un lien entre l'orientation et le sexe.

Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire 2 004–2 005 :

	1 ES	1 L	1 S
Femmes	76	50	92
Hommes	43	13	76

1. Dresser le tableau correspondant aux pourcentages, en faisant apparaître les pourcentages totaux.
Quels nombres vous paraissent les plus étonnants ?
À quoi, selon vous, cela est-il dû ?
2. (a) Comment sont réparties les femmes, en pourcentage, dans chacune des trois filières ?
(b) Comment sont répartis les hommes, en pourcentage, dans chacune des trois filières ?
(c) Quels pourcentages des deux questions précédentes s'éloignent le plus des pourcentages totaux ?
3. (a) Dans chacune des trois filières, quel est le pourcentage de femmes et d'hommes ?
(b) Quels pourcentages de la question précédente s'éloignent le plus des pourcentages totaux ?
4. À l'aide des questions précédentes, établir s'il existe un lien entre le sexe et la filière, éventuellement selon la filière, et préciser lequel.

Chapitre 3

Pourcentages

Sommaire

3.1 Introduction	27
3.2 Techniques de base	28
3.3 Changement d'ensemble de référence	28
3.4 Pourcentage d'évolution	30
3.5 Indices	32

3.1 Introduction

Conformément au programme, ce chapitre n'introduit pas de connaissance technique nouvelle, c'est pourquoi il est quasi exclusivement constitué d'exercices.

Il s'agit essentiellement d'entretenir un apprentissage de base indispensable pour lire correctement et de façon critique l'information chiffrée.

3.1.1 Qu'est-ce qu'un pourcentage ?

C'est d'abord un nombre issu d'un rapport, une proportion, entre le nombre d'éléments d'un ensemble de référence (en général une population) et le nombre d'éléments d'un sous ensemble de l'ensemble de référence, rapport que l'on transforme de façon à ce que le dénominateur soit égal à 100 (d'où l'origine du terme *pour-cent*).

On obtient ainsi le nombre d'éléments que comporterait le sous ensemble *si il y avait 100 éléments dans l'ensemble de référence*.

Ainsi s'il y a 16 garçons dans une classe de 26 élèves, il y en a $\frac{16}{26} \approx 0,6154 = \frac{61,54}{100} = 61,54\%$.

Les garçons représentent environ 61,54 % des élèves de la classe, c'est-à-dire que si il y avait 100 élèves dans la classe et que les garçons étaient en même proportion, alors il y aurait 61,54 garçons.

3.1.2 Taux et pourcentage

Il existe une confusion largement répandue sur ce qu'est un pourcentage. Lorsqu'on parle de 61,54%, on parle d'un nombre valant, très exactement, $\frac{61,54}{100}$, c'est-à-dire 0,6154.

Le nombre 61,54 est appelé le *taux* (ce n'est pas le pourcentage). Ainsi, s'il vous est demandé d'arrondir les pourcentages au dixième, 0,6154 deviendra 0,6, c'est-à-dire 60 %, alors que si on vous demande d'arrondir les taux au dixième, 0,6154, qui est égal à 61,54 % deviendra 61,5 %.

Exercice 3.6.

Il y a 800 élèves au Lycée JACQUES CARTIER. dans ce Lycée :

- 15 % des élèves de Lycée sont des filles de Première ;
- 48 % des élèves de Première sont des filles ;
- 25 % des filles du Lycée sont en Première.

1. Calculer l'effectif des filles de Première.
2. En déduire l'effectif des élèves de Première, puis des filles dans ce Lycée.
3. Compléter le tableau des effectifs ci-dessous :

	Fille	Garçon	Total
Première			
Autres			
Total			

4. Calculer le pourcentage d'élèves de Première dans ce Lycée.

Exercice 3.7.

Voici les résultats du référendum du 29 mai 2005 à Paris (*source : ministère de l'intérieur*) :

Inscrits	:	1 084 114
Abstention	:	24,94 % des inscrits
Blancs ou nuls	:	1,61 % des votants
Oui	:	66,45 % des suffrages exprimés
Non	:	33,55 % des suffrages exprimés

1. Quel est le nombre de votants ? Le nombre de suffrages exprimés ?
2. Quel pourcentage représentent les suffrages exprimés parmi les votants ? Parmi les inscrits ?
3. Quel est le pourcentage de Oui parmi la totalité des votants ? Par rapport à l'ensemble des inscrits ?

Exercice 3.8. 1. Un Lycée compte 1 250 élèves ; 26 % d'entre eux sont en classe de Première et 24 % des élèves de Première sont en Première ES.

- (a) Quel calcul doit-on effectuer pour déterminer le nombre d'élèves de Première du Lycée ?
 - (b) Quel calcul doit-on faire pour déterminer le nombre d'élèves en Première ES dans ce Lycée ?
 - (c) Combien y a-t-il d'élèves en Première ES dans ce Lycée ? Quel pourcentage cela représente-t-il vis-à-vis de l'ensemble des lycéens ?
 - (d) Quel calcul aurait-on pu faire directement pour déterminer ce pourcentage ?
2. 75 % des foyers d'un pays ont une connexion Internet, dont 80 % de type ADSL. Quel est le pourcentage de foyers équipés d'une connexion ADSL dans ce pays ?
 3. Dans une population, 65 % des individus partent en vacances et 20 % de ceux qui partent en vacances vont à la montagne. Quelle est la proportion de départs à la montagne dans cette population ?

Exercice 3.9. 1. Considérons les statistiques (fictives) suivantes :

- en janvier 2004 : 2 183 500 chômeurs, dont 624 200 jeunes (moins de 25 ans) ;
- en janvier 2005 : 2 008 700 chômeurs, dont 617 400 jeunes.

Le nombre de chômeurs a-t-il diminué ? Le nombre de jeunes chômeurs a-t-il diminué ? Le pourcentage de jeunes chômeurs parmi l'ensemble des chômeurs a-t-il diminué ?

2. Voici les chiffres d'affaires d'une entreprise (fictive) pendant quatre ans :

Année	1997	1998	1999	2000
CA (en millions d'€)	35	38	41	44

- (a) De combien de millions d'euros, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?
- (b) De combien de millions d'euros en pourcentage, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?

3.4 Pourcentage d'évolution

3.4.1 Activité

Activité 3.1.

Au 1^{er} janvier 2000, trois villes ont une population de 25 000 habitants.

1. *Ville 1*

(a) La population de la première ville augmente de 6 % en 2000, en 2001 et en 2002.
En déduire sa population au 1^{er} janvier 2003.

(b) Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée :

i. entre le 1^{er} janvier 2000 et le 1^{er} janvier 2001 ?

ii. entre le 1^{er} janvier 2001 et le 1^{er} janvier 2002 ?

iii. entre le 1^{er} janvier 2002 et le 1^{er} janvier 2003 ?

Ce nombre s'appelle le *coefficient multiplicateur* correspondant à une augmentation de 6 %.

(c) Par quelle nombre la population a-t-elle été multipliée entre le 1^{er} janvier 2000 et le 1^{er} janvier 2003 ?

À quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?

2. *Ville 2*

Le 31 décembre 2000, la deuxième ville a une population de 26 400 habitants.

Calculer le coefficient multiplicateur correspondant et en déduire le pourcentage d'augmentation.

3. *Ville 3*

La population de la troisième ville diminue de 6 % durant l'année 2000.

(a) Calculer sa population à la fin 2000, puis le coefficient multiplicateur correspondant.

(b) Si la population augmente de 6 % l'année suivante, calculer sa population à la fin 2001.

En déduire le pourcentage global d'évolution sur les deux années de début 2000 à fin 2001.

3.4.2 Quelques propriétés

Propriété 3.1. Augmenter une grandeur de t %, où $t \geq 0$, revient à multiplier cette grandeur par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Diminuer une grandeur de t %, où $t \geq 0$, revient à multiplier cette grandeur par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

Lorsqu'une grandeur évolue de t %, où t peut être positif (augmentation) ou négatif (diminution), elle est multipliée par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Preuve. Soit G la valeur de la grandeur avant l'évolution et G' celle après l'évolution.

- Dans le cas d'une augmentation, on a $G' = G + G \times \frac{t}{100} = G \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$. G est donc bien multipliée par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
- Dans le cas d'une diminution, on a $G' = G - G \times \frac{t}{100} = G \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)$. G est donc bien multipliée par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.
- Le dernier cas est le cas général.

◇

Propriété 3.2. Le taux d'évolution t d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par : $t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$.

Remarque. Si t est positif, c'est une hausse de t %, si t est négatif c'est une baisse de $|t|$ %.

Preuve. Dans le cas général, d'après la propriété précédente :

$$V_F = V_I \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow V_F = V_I + V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow V_F - V_I = V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100. \quad \diamond$$

Hausses et baisses successives

On l'a vu dans l'activité, dans le cas de hausses ou de baisses successives, les pourcentages ne s'ajoutent pas ; il faut multiplier les coefficients multiplicateurs correspondants.

En particulier, une baisse de t % n'est pas compensée par une hausse de t % (et réciproquement).

3.4.3 Exercices

Exercice 3.10. 1. Calculer les coefficients multiplicateurs dans chacun des cas suivants :

- hausse de 20 % ;
- hausse de 0,1 % ;
- hausse de 100 % ;
- hausse de 300 % ;
- baisse de 15 % ;
- baisse de 5,2 % ;
- baisse de 85 % ;
- baisse de 100 %.

2. Donner les pourcentages de hausse ou de baisse associés aux coefficients multiplicateurs suivants :

- 1,25 ;
- 3 ;
- 1,0049 ;
- 0,5 ;
- 0,98 ;
- 1,001 ;
- 1,0101 ;
- 0,999 ;
- 1,175 ;
- 1,01 ;
- 0,875 ;
- 0,1.

3. Donner le pourcentage d'évolution pour une grandeur qui passe :

- de 12 540 à 13 620 ;
- de 5,7 à 2,6 ;
- 21 000 à 84 000.

Exercice 3.11. 1. En août un loyer était de 564 €. Un an plus tard il est de 589 €. Quelle est son évolution en pourcentage ?

2. Le chiffre d'affaire d'une entreprise en 2004 était de 124 000 €. En 2005, les prévisions donnent un chiffre d'affaire de 117 000 € seulement. Quelle est son évolution en pourcentage ?

Exercice 3.12.

Dire que la TVA est de 19,6 % revient à dire que le prix hors taxe (HT) a été augmenté de 19,6 % de TVA pour obtenir le prix toutes taxes comprises (TTC).

1. Par quel nombre doit-on multiplier le prix HT pour obtenir le prix TTC ?
2. Un article vaut 120 € HT. Combien va-t-on le payer en magasin ?
3. Vous payez un article en magasin (donc TTC) à 200 €. À combien s'élève le prix HT et la TVA en € ?
4. Vaut-il mieux bénéficier d'une réduction de 20 % sur le prix HT ou sur le prix TTC ?

Exercice 3.13. 1. Le prix d'un article augmente de 22 % puis diminue de 15 %. Quel est le pourcentage d'évolution de cet article ?

2. Le prix d'un produit subit successivement une hausse de 12 %, une baisse de 5 %, une baisse de 8 % et une hausse de 2 %. Quel est le pourcentage de variation final.
3. Si le nombre de chômeurs dans une ville diminue de 2 % par mois pendant un an, quel sera le pourcentage de diminution du nombre de chômeurs sur l'année ?
4. Un client veut acheter un véhicule qui coûtait 17 000 € le mois dernier mais qui, depuis, a augmenté de 4 %. Le vendeur consent une remise de 3,85 %. Le modèle coûte-t-il plus ou moins de 17 000 € ?

Exercice 3.14. 1. Après une augmentation de 5 % suivie d'une hausse de t %, on obtient une hausse globale de 17,6 %. Combien vaut t ?

2. À la bourse de Paris, l'action Renault :

- a augmenté de 1,45 % entre le 10 juin 2000 et le 11 juin 2000 ;
- a baissé de 0,5 % entre le 10 juin 2000 et le 12 juin 2000.

Quelle a été son évolution entre le 11 juin 2000 et le 12 juin 2000 ?

3. Après deux augmentations successives de t % le prix d'un produit a globalement augmenté de 20 %. Combien vaut t ?
4. Après une augmentation de t % suivie d'une baisse de t %, on obtient une baisse globale de 4 %. Combien vaut t ?
5. Un article subit une augmentation de 10 %. Quel pourcentage de baisse doit-on appliquer pour compenser cette hausse ?

Exercice 3.15. 1. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 2 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 6 % ?

2. Est-il pertinent de dire qu'une hausse de 1 % suivie d'une baisse de 3 % suivie d'une hausse de 2 % sont approximativement équivalentes à une évolution globale de 0 % ?
3. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 20 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 60 % ?

3.5 Indices

Les indices sont des pourcentages qui ne disent pas leur nom.

Ils sont essentiellement utilisés dans des séries chronologies.

La valeur d'une grandeur observée d'une année ou d'un mois sert de référence (indice 100) et toutes les autres données (antérieures ou ultérieures) sont exprimées sous forme de pourcentage par rapport à cette année de référence.

Indices et grandeurs sont alors proportionnels.

Propriété 3.3. Soit n et n' deux dates, V_n et $V_{n'}$ les valeurs d'une grandeur à ces deux dates et I_n et $I_{n'}$ les indices correspondants, alors

$$\frac{I_n}{I_{n'}} = \frac{V_n}{V_{n'}}$$

En particulier, si n' est la date de référence (indice 100) et en notant V_0 la valeur de la grandeur à cette date, on a :

$$\frac{I_n}{100} = \frac{V_n}{V_0} \Leftrightarrow I_n = \frac{V_n}{V_0} \times 100$$

On l'admettra.

Les indices sont particulièrement utiles pour comparer des évolutions de deux grandeurs quand les grandeurs ne sont pas du même ordre ou n'ont pas les mêmes unités (comparer PIB et population par exemple).

Exercice 3.16.

Le tableau suivant donne la production de blé et d'orge en Algérie, en millions de tonnes :

Année	1996	1997	1998	1999
Blé	2,983	0,662	2,280	1,503
Orge	1,800	0,191	0,700	0,481

En prenant comme indice 100 la production de 1996, complétez le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999
Blé	100			
Orge	100			

Exercice 3.17.

On veut connaître l'évolution du PIB par habitant en France depuis 1990 qui servira d'année de référence.

On dispose du tableau suivant qu'on complètera au fur et à mesure par les réponses aux questions :

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
PIB (en \$)	1 195	1 201	1 322	1 250	1 331	1 535	1 554	1 406	1 447	1 432
Indice										

- Calculer l'indice des années 1991, 1995, 1996 et 1999 (arrondis à 0,1).
- En déduire le pourcentage d'évolution du PIB par habitant entre :
 - 1990 et 1991 ;
 - 1990 et 1995 ;
 - 1990 et 1999 ;
3. Quelle est l'unité de l'indice ?

Exercice 3.18.

Le tableau ci-dessous donne les montants, en milliards d'euros, des cotisations sociales versées par les non-salariés en France, de 1994 à 1999 (*source* : INSEE) :

Année	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Montant	16,66	17,33	19,03	19,25	15,23	15,99

- En prenant 100 pour base en 1994, calculer les indices des autres années.
- En déduire les pourcentages d'évolution de ces montants de 1994 à 1996, de 1994 à 1998, 1994 à 1999.
- En utilisant ces indices, calculer les pourcentages d'évolution de ces montants de 1997 à 1999.

Exercice 3.19.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix à la consommation en France entre 1998 et 2004 en prenant pour année de base l'année 1998 (indice 100) (*source : INSEE*) :

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Indice	100	100,5	102	103,5	105,6	107,6	109,3

- Donner l'évolution globale des prix consommés par les ménages entre :
 - 1998 et 1999 ?
 - 1998 et 2001 ?
 - 1998 et 2004 ?
 - 2000 et 2002 ?
 - 2000 et 2004 ?
- Reconstruire un tableau donnant l'évolution de l'indice des prix entre 2000 et 2004, en prenant 2000 comme année de référence (indice 100).

Exercice 3.20.

Le tableau suivant indique l'évolution du PIB base 100 en 1980 aux États-Unis (EU), au Japon et dans l'Union Européenne (UE) :

Année	1980	1990	1999
EU	100	132,6	172,3
Japon	100	155,2	166,0
UE	100	126,8	146,8

- Donner le pourcentage d'évolution du PIB aux EU entre 1980 et 1990 puis entre 1980 et 1999. Faire de même pour le PIB du Japon et dans l'UE.
- Pour les EU, calculer l'indice du PIB en 1999 base 100 en 1990. faire de même pour le Japon et l'UE (valeurs arrondies à 0,1 près).
- Si le PIB aux EU était de 5 554 milliards de dollars en 1990, calculer le PIB en 1980 et en 1999 (valeurs arrondies au milliard de dollars).
- Peut-on dire que le PIB du Japon est supérieur à celui de l'UE ?

Devoir surveillé n°3

Pourcentages

EXERCICE 1

7 points

Il y a 800 élèves au Lycée PIERRE BOURDIEU. Dans ce Lycée :

- 30 % des élèves sont en Première ;
- 22,5 % des élèves de Lycée sont des filles de Seconde ;
- 60 % des élèves de Seconde sont des filles ;
- 37,5 % des filles du Lycée sont en Seconde.

1. Calculer l'effectif des élèves de Première.
2. Calculer l'effectif des filles de Seconde.
3. En déduire l'effectif des élèves de Seconde, puis des filles dans ce Lycée.
4. Sachant qu'il y a autant de filles en Première et en Terminale, reproduire sur votre copie et compléter le tableau des effectifs ci-dessous :

	Fille	Garçon	Total
Seconde			
Première			
Terminale			
Total			

EXERCICE 2

4,5 points

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Cocher cette réponse sur la feuille, à rendre avec la copie.

Une réponse exacte rapporte 1,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,75 point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Augmenter une quantité de 7 %, puis la diminuer de 7 % c'est :	<input type="checkbox"/> revenir à la quantité initiale. <input type="checkbox"/> augmenter la quantité initiale de 0,49 %. <input type="checkbox"/> diminuer la quantité initiale de 0,49 %.
Dans une classe, 25 % des élèves pratiquent du tennis, 18 % de la natation et 9 % ces deux sports. Combien en pratiquent au moins un des deux :	<input type="checkbox"/> 52 %. <input type="checkbox"/> 34 %. <input type="checkbox"/> 43 %.
Une quantité qui subit deux baisses successives de 5 % et de 4 % :	<input type="checkbox"/> diminue de 4,5 %. <input type="checkbox"/> diminue de 8,8 %. <input type="checkbox"/> diminue de 9 %.

EXERCICE 3

8,5 points

1. Après une hausse de 5 % le prix d'un article est de 38,22 €. Quel était le prix de cet article avant la hausse ?
2. Le prix d'un article a subi une hausse de 28 %. Quel doit être le taux de remise pour que cet article retrouve son prix initial ?
3. Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 11,64 % en deux ans. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
 - (a) Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est différent de 5,82 %.
 - (b) Calculer le pourcentage de baisse annuel.
4. Pierre a fait établir un devis pour réaliser des travaux dans son domicile par un artisan. Ce devis a été établi avec un taux de TVA de 19,6 % et le montant total TTC est égal à 4807,92 €. Mais comme la maison de Pierre est construite depuis plus de deux ans, le taux de TVA est égal à 5,5 %. Quel sera finalement le montant du devis ?

Chapitre 4

Systemes d'equations et d'inequations

Sommaire

4.1 Activités	37
4.2 Bilan et compléments	41
4.3 Exercices	42

4.1 Activités

Activité 4.1 (Équations de droites (rappels)).

Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal.

- Quelle est la nature de \mathcal{C} la représentation graphique de la fonction $f(x) = -3x + 0,5$, définie sur \mathbb{R} . Déterminer si $A(150, 5; -451)$ ou $B(-73, 25; -219, 5)$ appartiennent à \mathcal{C} .
- Dans chacun des cas suivants, dire si le point A appartient à la droite \mathcal{D} :
 - $A(\frac{1}{3}; \frac{13}{6})$ et $\mathcal{D} : y = 6x + \frac{1}{6}$;
 - $A(1; -7)$ et $\mathcal{D} : y = -\frac{3}{4}(x+2) - 5$;
 - $A(2; 5)$ et $\mathcal{D} : x = 5$;
 - $A(\frac{1}{3}; \frac{1}{6})$ et $\mathcal{D} : y = \frac{1}{6}$;
- La droite \mathcal{D} est d'équation réduite : $y = \frac{5}{2}x - 1$.
 - A est le point de \mathcal{D} d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
 - B est le point de \mathcal{D} d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?
- Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :
 - $\mathcal{D}_1 : y = -\frac{1}{2}x + 5$;
 - $\mathcal{D}_2 : y = 4x - 2$;
 - $\mathcal{D}_3 : y = -3$;
 - $\mathcal{D}_4 : y = \frac{3}{4}x - 4$;
 - $\mathcal{D}_5 : x = 6$;
- Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :
 - $\mathcal{D}_1 : y = -5x + 10$;
 - $\mathcal{D}_2 : y = 6x - 14$;
 - $\mathcal{D}_3 : y = \frac{3x-1}{6}$;
 - $\mathcal{D}_4 : y = \frac{-2x+1}{4}$;
 - $\mathcal{D}_5 : 2x - 5y = 3$;
- Dans un même repère, tracer les droites suivantes :
 - \mathcal{D}_1 passant par $A(3; 1)$ et de coefficient directeur -1 ;
 - \mathcal{D}_2 passant par $B(-3; 2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
 - \mathcal{D}_3 passant par $C(1; 0)$ et de coefficient directeur 3 ;
 - \mathcal{D}_4 passant par $D(0; 2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
 - \mathcal{D}_5 passant par $E(-2; 2)$ et de coefficient directeur 0 ;
- Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (AB) :
 - $A(1; 2)$ et $B(3; -1)$;
 - $A(4; 4)$ et $B(-1; 2)$;
 - $A(0; -1)$ et $B(2; 3)$;
 - $A(-2; 2)$ et $B(3; 2)$;
 - $A(1; 3)$ et $B(1; 4)$;
 - $A(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ et $B(3; 5)$.
- Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur la figure 4.1 page suivante.
- Même question pour les droites représentées sur la figure 4.2 page suivante.

FIG. 4.1 – Figure 1

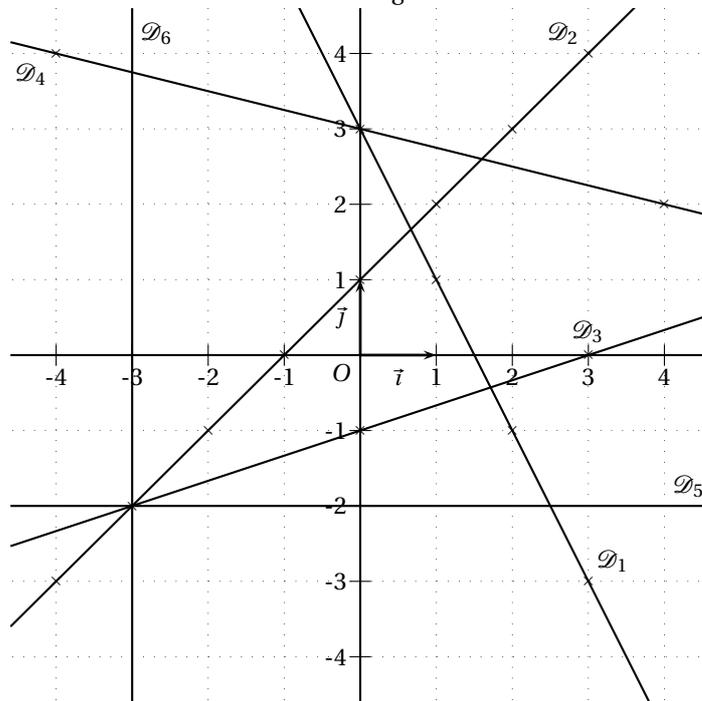
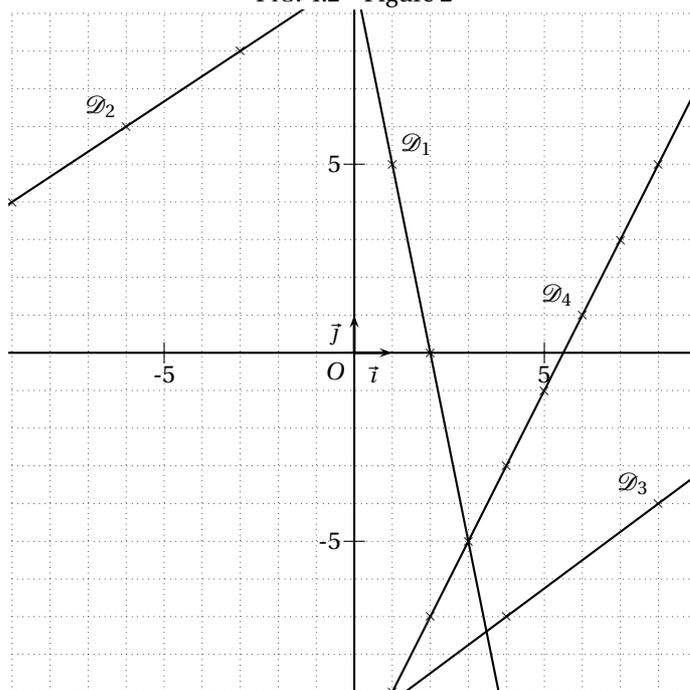


FIG. 4.2 – Figure 2



Activité 4.2 (Autres équations).

Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal.

- On cherche à identifier quel est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $2x + y = 3$.
 - Déterminer y lorsque $x = 1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera A .
 - Déterminer y lorsque $x = 0$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera B .
 - Déterminer x lorsque $y = -3$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera C .
 - Déterminer x lorsque $y = -1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera D .
 - Que constate-t-on concernant A, B, C et D ?
 - Choisir un autre point ayant la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.
 - Choisir un autre point n'ayant pas la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.
- En vous inspirant de ce qui précède, représenter l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $3x - 2y = 4$.
- Mêmes questions avec les relations suivantes :
 - $-x + 3y = 1$; • $-x - 2y = 3$; • $2x + 0y = 5$; • $0x + 3y = 2$.
 Que constate-t-on dans les deux derniers cas ?

Activité 4.3 (Droites parallèles, droites sécantes).

Droites parallèles.

- On considère les droites $\mathcal{D}_1 : 2x + 5 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : x = -1$.
Expliquer pourquoi elles sont parallèles.
- On donne $\mathcal{D}_3 : y = 3x + 4$, $\mathcal{D}_4 : 3x - y = 9$ et $\mathcal{D}_5 : 3x + y = 0$.
 - Trouver l'équation réduite de chacune des droites \mathcal{D}_4 et \mathcal{D}_5 .
 - Reconnaître parmi ces trois droites celles qui sont parallèles.
- On donne la droite $\mathcal{D} : 5x + 2y = 10$.
 - Trouver les points d'intersection de la droite \mathcal{D} avec les axes du repère puis la tracer.
 - Trouver l'équation réduite de la droite \mathcal{D} et en déduire son coefficient directeur.
 - Tracer la droite \mathcal{D}' parallèle à \mathcal{D} et passant par le point $K(1; -1)$; trouver l'équation réduite de \mathcal{D}' .
 - Montrer que l'équation de \mathcal{D}' peut s'écrire $5x + 2y = 3$.
 - Montrer que la droite \mathcal{D}'' d'équation $5x + 2y = c$, où c désigne un nombre réel, est parallèle à la droite \mathcal{D} .
 - En déduire que la droite Δ d'équation $10x + 4y = c'$, où c' désigne un nombre réel, est elle aussi parallèle à la droite \mathcal{D} .

Droites sécantes.

On considère les droites $\mathcal{D}_1 : 2x + y = 5$ et $\mathcal{D}_2 : 3x - 5y = 3$.

- Trouver les équations réduites des droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 et montrer qu'elles sont sécantes.
- Tracer ces deux droites et lire graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection I .
- Expliquer pourquoi les coordonnées $(x; y)$ de I vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 3 \end{cases}$$

- Résoudre ce système.

Activité 4.4 (Régionnement du plan).

- Dans un repère orthogonal tracer la droite \mathcal{D} d'équation $2x - 3y = 6$.
 - Choisir quatre points à coordonnées entières situés du même côté de \mathcal{D} et calculer $2x - 3y$ pour chacun d'entre eux.
 - faire de même avec quatre autres points à coordonnées entières situés de l'autre côté de \mathcal{D} .
 - Que constate-t-on ?
 - Identifier la région du plan dont les points ont leurs coordonnées vérifiant $2x - 3y \geq 6$ (on hachurera le reste).
- En vous inspirant de ce qui précède, faire de même pour la région caractérisée par l'inéquation $-3x - 4y \geq -12$ (on hachurera le reste).

3. Même question pour les inéquations $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
4. Quel système d'inéquations vérifie la région non hachurée ?

Activité 4.5 (Programmation linéaire).

On considère le problème suivant :

Une coopérative vinicole dispose de 600 bouteilles de vin rouge et 600 bouteille de vin blanc. Il est décidé de proposer à la vente deux assortiments :

- L'assortiment appelé A, comprenant deux bouteilles de vin rouge et trois bouteilles de vin blanc, est vendu 12 euros ;
 - L'assortiment appelé B, comprenant cinq bouteilles de vin rouge et trois bouteilles de vin blanc, est vendu 20 euros.
- Combien doit-on vendre d'assortiments de chaque sorte pour espérer un chiffre d'affaires maximal ?

1. Dans la résolution proposée ci-dessous, justifier :
 - (a) la mise en équation ;
 - (b) la construction du polygone ;
 - (c) la conclusion.
2. Expliciter les solutions.

Résolution

On appelle x et y les nombres respectifs d'assortiments A et B.

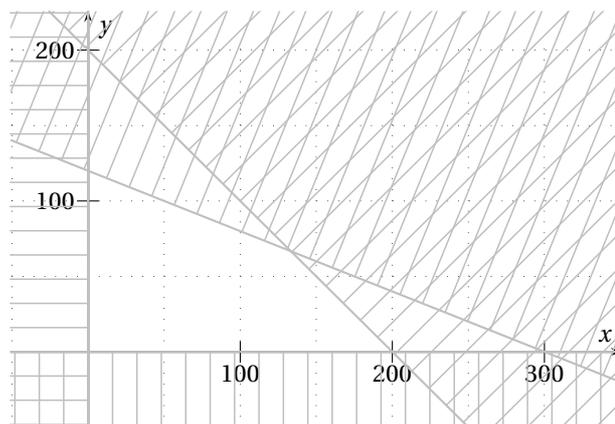
x et y sont des nombres entiers vérifiant le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 5y \leq 600 \\ 3x + 3y \leq 600 \end{cases}$$

On recherche alors les valeurs entières de x et y vérifiant le système précédent et telles que $12x + 20y$ soit maximal.

On résout le problème graphiquement : dans le plan muni d'un repère, on représente les points M du plan dont les coordonnées vérifient le système d'inéquation ; ce sont les points situés à l'intérieur (zone non hachurée) du polygone dessiné de la présente page.

On considère la droite D d'équation $12x + 20y = 0$. On recherche parmi toutes les parallèles à D , la droite D' qui coupe le polygone en au moins un point de coordonnées entières et dont l'ordonnée à l'origine est maximale. Ses coordonnées entières fournissent la solution du problème.



4.2 Bilan et compléments

Propriété 4.1 (rappel). Dans un repère, toute droite a une équation de la forme :

- $y = mx + p$, si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ;
- $x = k$, si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

L'équation $y = mx + p$ (quand elle existe) est appelée *équation réduite* de la droite, m est appelé *coefficient directeur* de la droite et p *ordonnée à l'origine*

Propriété 4.2 (rappel). Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles entre elles si et seulement si elles ont même coefficient directeur.

Propriété 4.3. Dans un repère :

- Soit \mathcal{D} une droite du plan. Tous les points de cette droite ont des coordonnées qui vérifient une même équation de la forme $ax + by = c$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.
- L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui vérifient $ax + by = c$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite \mathcal{D} .
On dira que la droite \mathcal{D} admet comme équation $ax + by = c$.

Remarque. Si l'équation réduite est unique, ce n'est pas le cas d'une équation de la forme $ax + by = c$. En effet, il suffit de multiplier cette équation par un réel quelconque (différent de 0) pour en obtenir une autre.

Preuve de la propriété.

- Soit \mathcal{D} une droite du plan et $M(x; y)$ un point de \mathcal{D} .
 \mathcal{D} a pour équation réduite $y = mx + p$ ou $x = k$.
Dans le premier cas, tous les points $M(x; y)$ vérifient $y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$ qui est de la forme $ax + by = c$ avec $(a; b) = (m; -1) \neq (0; 0)$.
Dans le second cas, tous les points $M(x; y)$ vérifient $x = k \Leftrightarrow x - k = 0$ qui est de la forme $ax + by = c$ avec $(a; b) = (1; 0) \neq (0; 0)$.
- Soit \mathcal{E} l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $ax + by = c$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.
Si $a = 0, b \neq 0$ et donc $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -c \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$ (droite parallèle à l'axe des abscisses) qui est de la forme $y = mx + p$.
Si $b = 0, a \neq 0$ et donc $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow ax = -c \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées) qui est de la forme $x = k$.
Si $a \neq 0$ et $b \neq 0, ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ qui est de la forme $y = mx + p$.
Dans tous les cas, c'est bien une droite. ◇

Propriété 4.4. Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$

Preuve.

- Supposons que \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles.
 - Si elles sont parallèles à l'axe des ordonnées, on a alors $b = b' = 0$ et donc $ab' - a'b = 0$
 - Dans tous les autres cas, elles admettent comme équations réduites, respectivement, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ et $y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}$.
Étant parallèles, $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \Leftrightarrow -ab' = -a'b \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$.
- Supposons que $ab' - a'b = 0$.
 - Si $b = 0, a \neq 0$ et donc $b' = 0$. De même, si $b' = 0, b = 0$. Les deux droites sont alors parallèles à l'axe des ordonnées.
 - Dans tous les autres cas, $ab' - a'b = 0 \Leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$, donc elles ont même coefficient directeur. ◇

Des deux propriétés précédentes, on obtient la propriété suivante :

Propriété 4.5. Soit \mathcal{S} le système d'équation $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

- \mathcal{S} a une unique solution $(x; y)$ si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$;
- sinon \mathcal{S} a soit une infinité de solution, soit aucune solution.

Preuve. Les droites d'équation $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont sécantes si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$, sinon elles sont parallèles.

Dans ce cas elles peuvent être confondues (une infinité de points d'intersection) ou distinctes (aucun point d'intersection). ◇

Propriété 4.6 (admise). Une droite \mathcal{C} d'équation $ax + by = c$ partage le plan en trois parties :

- la droite \mathcal{C} dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by = c$;
- un demi-plan dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by > c$;
- un demi-plan dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by < c$.

Remarque. Le demi-plan dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by > c$ n'est pas forcément situé au-dessus de la droite ; cela dépend des signes coefficients.

Pour savoir lequel des deux demi-plans est celui dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by > c$, il suffit de faire un essai avec un point extérieur à la droite : si l'inéquation est vérifiée, tous les points situés du même côté de la droite forment ce demi-plan, sinon c'est l'autre.

Un système d'inéquations linéaires se résout graphiquement. Pour des raisons de lisibilité, on hachure en général les demi-plans ne convenant pas, la partie du plan non-hachurée étant l'ensemble des solutions.

4.3 Exercices

Exercice 4.1 (Prévoir sans calcul).

Pour chacun des systèmes suivants déterminer, sans le résoudre, s'il admet une solution unique. Dans les cas où le système n'admet pas de solution unique, préciser ce que l'on peut dire de l'ensemble solution.

$$1. \begin{cases} 4x - 6y = -26 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x = 6y + 7 \\ 8,5 - 2,5x + 5y = 6 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -2y + 6x = 5 \\ -9x + 3y = -7,5 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} -3x + 4y = 9 - 5x \\ -x + 5y = 25 \end{cases}$$

Exercice 4.2 (Quelle méthode choisir?).

Pour résoudre les systèmes, on dispose depuis la classe de troisième de deux méthodes principales et d'une troisième qui combine les deux précédentes.

1. Décrire ces trois méthodes.
2. Pour chacun des systèmes suivants, choisir la méthode de résolution la plus appropriée :

$$(a) \begin{cases} 2x + 7y = 1 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - 2 = 1 + 2y - 5 \\ 3x = 1 - (y - 1) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - y = 7,5 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} -8(x - 1) - 7y - 18 = 0 \\ 5y + 8x = 16 \end{cases}$$

Exercice 4.3 (Organiser la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues).

On s'intéresse à des systèmes de trois équations à trois inconnues.

1. Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système :

$$(S) : \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - z = -4 \\ 5x - 2y - z = -7 \end{cases} \quad \text{Expliciter la méthode employée.}$$

2. Voici la méthode exposée par GAUSS pour résoudre le système (S) (on appelle E_1 la première équation, E_2 la deuxième, E_3 la troisième) :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 0 & (E_1) \\ -4y - 16z = -4 & (E_2 - 3E_1) = (E'_2) \\ -7y - 26z = -7 & (E_3 - 5E_1) = (E'_3) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 0 & (E_1) \\ y + 4z = 1 & (E'_2 \times (-\frac{1}{4})) = (E''_2) \\ -7y - 26z = -7 & (E'_3) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 5z = 0 & (E_1) \\ y + 4z = 1 & (E''_2) \\ 2z = 0 & (E'_3 + 7E''_2) \end{cases}$$

- (a) En quoi le dernier système obtenu est-il intéressant pour la résolution de (S) ?
- (b) Décrire la méthode permettant d'obtenir ce système.
- (c) Donner l'ensemble solution de (S).

3. Résoudre à l'aide de la méthode précédente le système :

$$\begin{cases} x + 1,5y = 5,5 - z \\ 7x = 2y - z + 26 \\ 25x - 3y + 6z - 97 = 0 \end{cases}$$

Exercice 4.4 (Système 2×2 : équilibre sur le marché pour un bien).

Une entreprise possède le monopole de la vente d'un certain type de café. Ce café est vendu sous forme de paquets d'un kg.

Une étude de marché a fourni les résultats suivants.

- **Offre** : Compte tenu des coûts de production, l'entreprise a fixé le prix minimal de vente à 2 €. Pour un prix de vente de 6 €, la production idéale pour l'entreprise est de 250 000 paquets.
- **Demande** : Compte tenu du marché, on estime que pour un prix de vente de 5,5 €, la demande serait de 50 000 paquets et pour un prix de vente de 3 €, elle serait de 175 000 paquets.

1. Fonction d'offre

On considère le marché du point de vue de l'entreprise qui se préoccupe avant tout de sa rentabilité.

On note p_o le prix de vente (en €) et Q_o le nombre optimal de paquets produits par l'entreprise (en milliers d'unités) pour ce prix de vente p_o .

- Vérifier que la fonction $f : Q_o \mapsto p_o = 0,016Q_o + 2$ vérifie les conditions de l'offre.
- Dans un repère, représenter graphiquement la fonction f (on placera les quantités en abscisses et les prix en ordonnées).

2. Fonction de demande

On se place ici du point de vue du consommateur qui a tendance à réduire sa consommation quand les prix de vente augmentent.

On note p_d le prix payé (en €) et Q_d (en milliers d'unités) le nombre de paquets que les consommateurs sont prêts à acheter au prix p_d .

La fonction de demande notée g associée à Q_d le prix p_d .

On suppose que g est une fonction affine, $g : Q_d \mapsto p_d = aQ_d + b$.

- En utilisant les conditions sur la demande, établir un système de deux équations dont $(a; b)$ est solution.
- Résoudre ce système et en déduire l'expression de g .
- Sur le graphique précédent, représenter la fonction g .
- Quel est le prix maximal qu'accepterait de payer le consommateur ?
- Quelle est la quantité maximale que les consommateurs sont disposés à acheter ?

3. Équilibre sur le marché

L'idéal sur le marché serait que l'offre coïncide avec la demande. Ce point d'équilibre est atteint quand $p_o = p_d$ et $Q_o = Q_d$.

- Graphiquement où se situe ce point d'équilibre ?
- Déterminer algébriquement le prix de vente du paquet et la quantité produite à l'équilibre du marché.

Exercice 4.5 (Systèmes 3×3 : modèle ouvert de LEONTIEFF¹).

Voici un modèle (simple) de complexe industriel :

- Le complexe est constitué d'une centrale électrique au fioul, d'une raffinerie de pétrole et d'un chemin de fer.
- La raffinerie utilise, pour 1 € de fioul produit, 0,20 € d'électricité et 0,10 € de transport ferroviaire.
- La centrale électrique utilise, pour 1 € d'électricité produite, 0,55 € de fioul, 0,10 € d'électricité et 0,05 € de transport ferroviaire.
- Le chemin de fer utilise, pour 1 € de transport, 0,60 € d'électricité et 0,20 € de fioul.

Ce complexe industriel doit livrer à l'extérieur du fioul pour un montant de 92 000 € et de l'électricité pour un montant de 38 000 €. On se propose de déterminer les productions (en euros) x de fioul, y d'électricité et z de transport pour que ce complexe industriel puisse effectuer sa livraison.

1. Montrer que le problème peut se traduire par le système suivant (on justifiera chaque ligne) :

$$\begin{cases} x - 0,55y - 0,2z = 92\,000 \\ y - 0,2x - 0,6z = 38\,000 \\ z - 0,1x - 0,05y = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre ce système.

3. Conclure.

¹VASSILI LEONTIEFF, Prix Nobel d'économie en 1973, a réalisé des recherches sur l'analyse interindustrielle, qui est utilisée pour la planification, l'étude de la croissance.

Exercice 4.6 (Programmation linéaire : traitement de déchets industriels).

Une entreprise de déchets industriels a le choix entre deux procédés qui ne peuvent être utilisés en même temps.

- **Procédé A** : Il permet de traiter 3 tonnes de déchets par heure et produit des résidus gazeux. Pour chaque tonne traitée, on rejette 8 L de gaz polluant.
- **Procédé B** : Il permet de traiter 1 tonne de déchets par heure et produit des résidus liquides. Pour chaque tonne traitée, on rejette 1 L de liquide polluant.

L'entreprise doit traiter au moins 2 600 tonnes de déchets en moins de 2 400 heures, tout en respectant les autorisations de rejet. Elle a obtenu une autorisation de rejet gazeux de 10 000 L et de rejet liquide de 4 000 L.

On note x le nombre de tonnes traitées avec le procédé A et y le nombre de tonnes traitées avec le procédé B.

1. Quelles sont les durées nécessaires pour traiter x tonnes avec le procédé A et y tonnes avec le procédé B ?
2. Justifier que les contraintes ci-dessus se traduisent par le système (S) :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1250 \\ 0 \leq y \leq 4000 \\ \frac{x}{3} + y \leq 2400 \\ x + y \geq 2600 \end{cases}$$

3. Résoudre graphiquement le système (S) dans un repère orthogonal (unités : 1 cm représente 100 tonnes en abscisses et 1 cm représente 400 tonnes en ordonnées).
4. (a) Le procédé A coûte 50 € la tonne, et le procédé B coûte 100 € la tonne.
Quel est le coût C associé au traitement de x tonnes avec le procédé A et y tonnes avec le procédé B ?
(b) Justifier que pour un coût C, le point $M(x; y)$ appartient à une droite Δ_C dont on donnera l'équation réduite.
(c) Tracer Δ_{260000} et Δ_{150000} . Justifier que toutes les droites Δ_C sont parallèles.
5. (a) Par translation d'une des droites tracées, déterminer en quel point du domaine des contraintes, le coût est minimum. Préciser ce coût.
(b) Pour ce coût minimum, déterminer alors la quantité de matière traitée avec chaque procédé, la durée de traitement et les volumes de rejets polluants sous forme liquide et gazeuse.
6. Quelles seraient les conséquences économiques d'une réduction de 50% des autorisations de rejet ?
Quelle(s) stratégie(s) l'entreprise a-t-elle alors intérêt à adopter à long terme ?

Exercice 4.7.

Au moment des fêtes, un artisan chocolatier propose des assortissements de chocolats par ballotins de 500 g :

- *Succès* : 60 % de chocolats au lait, 20 % de chocolats noirs et le reste en chocolats divers ;
- *Passion* : 80 % de chocolats noirs et le reste en chocolats divers ;
- *Évasion* : la moitié de chocolats divers, 40 % de chocolats noirs et 10 % de chocolats au lait.

1. Pour sa soirée de fin d'année 1999, Madame Bomonde a commandé des chocolats.
Elle a pu mettre sur son buffet 2 kg de chocolats noirs, 1,5 kg de chocolats au lait et 2 kg de chocolats divers.
Calculer le nombre de ballotins de chaque sorte qu'elle a acheté fin 1999.
2. Pour la fin 2000, le chocolatier a proposé les mêmes assortissements.
Madame Bomonde passe commande de x ballotins *Succès* et y ballotins *Passion*.
Elle désire proposer à ses invités au moins 1,8 kg de chocolats noirs, 1,2 kg de chocolats au lait et 900 g de choco divers
(a) Justifier que les contraintes se traduisent par le système suivant où x et y sont des entiers :

$$\begin{cases} x + 4y \geq 18 \\ 3x \geq 12 \\ x + y \geq 9 \end{cases}$$

- (b) Dans un repère orthonormal, représenter l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient le système ci-dessus.
- (c) Le prix d'un ballotin *Succès* est de 15 € et celui d'un ballotin *Passion* de 30 €. Exprimer le coût total de cet achat pour Madame Bomonde en fonction de x et y .
Tracer la droite correspondant à un coût de 210 €. Existe-t-il des points solutions du système situés en dessous de cette droite ?
Déterminer graphiquement le nombre de ballotins de chaque sorte acheté qui permet à Madame Bomonde un coût total minimum. Expliquer la méthode employée.
En déduire le coût total de son achat pour la fin 2000.

Devoir surveillé n°4

Pourcentages – Indices – Systèmes

EXERCICE 1

7 points

On trouve sur le site de l'INSEE² des données sur des ménages pauvres et sur celui de la CNAF³ des données sur le nombre de personnes titulaires du R.M.I.⁴ à partir desquelles ont été établis des indices (base 100 en 2000). L'ensemble est résumé dans le tableau ci-dessous :

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Ménages pauvres (en milliers)	1 508	1 483	1 548	1 510	1 582	1 514	1 563	1 570	1 608
Indice des ménages pauvres (base 100 en 2000)					100				
Titulaires du R.M.I. (base 100 en 2000)	92	97	101	104	100	98	100	105	113

- Compléter la ligne 3 avec les indices (arrondis à l'unité) correspondants au nombre de ménages pauvres, base 100 en 2000.
 - Quelle a été la variation en pourcentage du nombre de ces ménages entre :
 - 2000 et 2001?
 - 2000 et 2004?
 - 2002 et 2004?
 - 1996 et 2004?

On justifiera les réponses en indiquant les calculs effectués.
- D'après les indications données par le tableau, comparer l'évolution du nombre de titulaires du R.M.I. et de ménages pauvres entre 2000 et 2004.
 - Peut-on dire qu'il y a plus de titulaires du R.M.I. que de ménages pauvres en 2002?
- Sachant que le nombre de titulaires du R.M.I. était de 396 160 en 1989, année de sa création, et de 1 215 300 en 2004 :
 - quel est l'indice correspondant à l'année 1989?
 - quel serait l'indice correspondant à l'année 2004 si la base était 100 en 1989?
 - par quel coefficient le nombre de personnes titulaires du R.M.I. a-t-il été multiplié entre 1989 et 2004?
 - quel est le pourcentage d'augmentation correspondant?

EXERCICE 2

2 points

Parmi les systèmes suivants, qu'on ne demande pas de résoudre, quels sont ceux qui ont une solution unique (justifier) ?

$$1. \begin{cases} x+3y = 2 \\ 3x+9y = 1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x+3y = -1 \\ 2y+3x = -4 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 2x+3y = -2x+13 \\ 2x-y = -1 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 2x+4y = 1 \\ 3x+3y = -3y \end{cases}$$

EXERCICE 3

6 points

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+y+z = 1 \\ x+2y+z = 2 \\ x+y+2z = -3 \end{cases}$$

EXERCICE 4

5 points

- Le prix toutes taxes comprises d'un article est de 157 €. Sachant que la TVA est de 5,5 %, quel était son prix hors taxe ?
- Le prix d'un article a subi une baisse de 22 %. Quel doit être le taux d'augmentation pour que cet article retrouve son prix initial ?
- Quelle doit être la hausse chaque année pour que la hausse sur deux ans soit égale à 40 % ?

²Institut National de la Statistique et des Études Économiques : www.insee.fr

³Caisse Nationale d'Allocations Familiales : www.caf.fr

⁴Revenu Minimum d'Insertion

Chapitre 5

Nombre dérivé

Sommaire

5.1 Activités	47
5.2 Nombre dérivé	48
5.3 Interprétation graphique du nombre dérivé	48
5.4 Approximation affine d'une fonction	49
5.5 Exercices	50

5.1 Activités

Activité 5.1.

Un corps en chute libre, lâché sans vitesse initiale, parcourt au bout de t secondes la distance $d(t)$ (en mètres) exprimée par : $d(t) = 5t^2$

1. Calculer la distance parcourue par le corps en chute libre au bout de 0, 1, 2, 3, 4, 5 secondes. Tracer la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction d sur l'intervalle $[0; 5]$.
2. Calculer la vitesse moyenne du corps en chute libre dans les intervalles de temps $[0; 1]$; $[1; 2]$; $[2; 3]$; $[3; 4]$; $[4; 5]$.
Que constate-t-on ?
Comment peut-on retrouver graphiquement ces vitesses moyennes ?
3. Inventer une manière d'obtenir la vitesse instantanée à l'instant $t = 2$.

Activité 5.2.

Cette activité est à réaliser à l'aide du logiciel *Geogebra*.

On s'intéresse à la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 25$ et on appelle \mathcal{P} sa courbe représentative.

On appelle :

- T le point de \mathcal{P} d'abscisse 1 ;
 - T_h le point de \mathcal{P} d'abscisse $1 + h$ où h est un réel ;
 - \mathcal{D} la sécante (TT_h) .
1. Dans un nouveau fichier, créer \mathcal{P} et T .
On créera $f(x)$ et le point $(1; f(1))$ dans la zone de saisie.
 2. Créer un curseur (cinquième bouton) nommé h pouvant varier de -5 à 5 et d'incrément $0,01$.
 3. En utilisant le curseur h créer $T_h (1 + h; f(1 + h))$ et $\mathcal{D} = (TT_h)$.
On affichera l'équation de \mathcal{D} sous sa forme réduite : $y = mx + p$.
 4. Conjecturer la valeur de m dans chacun des cas suivants :
 - $h = -1$;
 - $h = -0,5$;
 - $h = -0,1$;
 - $h = -0,01$.
 5. Vérifier par le calcul votre conjecture dans les deux premiers cas.
 6. Montrer, par le calcul, que, dans le cas général, $m = -2 - h$ pour $h \neq 0$
 7. Quand h tend vers 0 :
 - (a) Vers quelle valeur tend m ?
 - (b) Vers quel point tend M_h ?
 - (c) Vers quelle droite tend la sécante \mathcal{D} ?
 - (d) En déduire l'équation réduite de cette droite.

On appellera *tangente* à \mathcal{P} au point d'abscisse 1, la droite de laquelle se rapproche la sécante d quand h tend vers 0 et on appellera *nombre dérivé de $f(x)$ en 1* le coefficient directeur de la tangente.

5.2 Nombre dérivé

Définition. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres *distincts* a et b le nombre :
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On écrit la plupart du temps $a + h$ à la place de b et la définition devient alors :

Définition 5.1 (Accroissement moyen d'une fonction entre a et $a + h$). On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres distincts a et $a + h$ le nombre :
$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Les deux définitions sont équivalentes (il suffit de poser $b = a + h$). C'est la seconde que nous utiliserons pour la suite.

On a vu dans les activités que cet accroissement moyen *tendait* vers l'accroissement « instantané » quand h *tendait* vers 0. Cet accroissement « instantané » est appelé *nombre dérivé* en mathématiques, et on a donc la définition suivante :

Définition 5.2 (Dérivabilité et nombre dérivé). Si, quand h *tend* vers 0, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers un nombre A , on dit que la fonction f est *dérivable en a* et on appelle A le *nombre dérivé de f en a* . On le note $f'(a)$.

Remarques. • On note parfois $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ l'accroissement moyen, surtout en physique.

Δx est la différence¹ entre deux valeurs de x , $\Delta f(x)$ celle entre les deux valeurs correspondantes de $f(x)$.

- On note parfois $\frac{df(x)}{dx}$ le nombre dérivé. Le d indique là encore une différence mais entre deux valeurs infiniment proches.
- Ces nombres correspondent à des quantités concrètes qui dépendent de la nature de la fonction f ou de la variable. Ainsi, si $f(t)$ est la distance parcourue au bout d'un temps t , la variation moyenne ne sera rien d'autre que la vitesse moyenne et le nombre dérivé est la vitesse instantanée.

Exemple 5.1. La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 7$ est-elle dérivable en $a = 2$?

Pour le savoir étudions la quantité suivante :
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
.

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} \\ &= \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} \\ &= 12 + 6h + h^2 \text{ avec } h \neq 0 \end{aligned}$$

Lorsque h *tend* vers 0 (en restant différent de 0), $12 + 6h + h^2$ *tend* vers 12. Donc f est dérivable en $a = 2$ et son nombre dérivé en 2 est 12. On note alors $f'(2) = 12$.

5.3 Interprétation graphique du nombre dérivé

Définition 5.3 (Tangente à une courbe). On appelle *tangente à une courbe \mathcal{C} en un point M* , appartenant à \mathcal{C} , une droite passant par M et qui, si elle existe, est aux alentours de M , la droite la plus proche de \mathcal{C} .

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f et $A(a; f(a))$ et $B(a + h; f(a + h))$, deux points de cette courbe.

La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) , sécante à la courbe.

Lorsque h *tend* vers 0, la sécante (AB) *tend* vers la tangente à la courbe au point A et le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers le coefficient directeur de la tangente en A .

On a donc la propriété suivante, qu'on admettra :

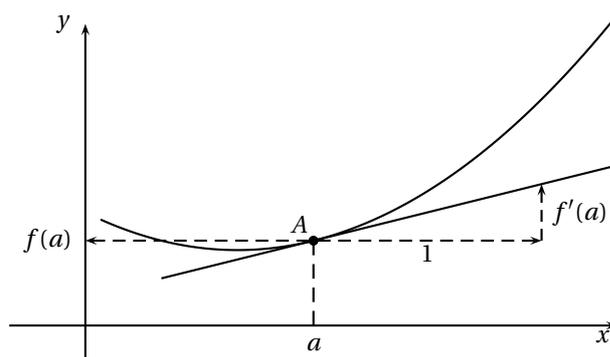
Propriété 5.1. Soit f une fonction dérivable en a et \mathcal{C} la courbe représentative de f . Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse a .

Le schéma 5.1 page ci-contre illustre cette propriété.

Remarque. Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de la tangente ; en particulier, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente.

¹ Δ est la lettre grecque correspondant à D

FIG. 5.1 – Interprétation graphique du nombre dérivé



5.4 Approximation affine d'une fonction

L'idée de l'approximation affine est de trouver une fonction affine qui au voisinage de a serait la plus proche possible de f .

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse a était la droite la plus proche de la courbe au voisinage de a . Or comme toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées (c'est le cas de la tangente), elle est la représentation graphique d'une fonction affine. Il est donc « naturel » de choisir comme approximation affine de la courbe au voisinage de a la fonction dont la représentation graphique est la tangente à la courbe au point d'abscisse a .

On a donc :

Définition 5.4. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a .

On appelle *approximation affine de f au voisinage de a* , la fonction g , telle que : $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

Propriété 5.2. La représentation graphique de g est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a et son équation réduite est donc $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Preuve. La tangente est la droite passant $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ or $A(a; f(a))$ appartient à la représentation graphique de g car $g(a) = f(a) + f'(a)(a - a) = f(a)$. Par ailleurs g est une fonction affine car $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = f'(a)x + f(a) - af'(a) = mx + p$ où $m = f'(a)$ et $p = f(a) - af'(a)$. g a donc pour représentation graphique une droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$ qui est, par définition, la tangente à la courbe de f en A . \diamond

Lorsque x est proche de a la différence entre $f(x)$ et $g(x)$ est petite et $g(x)$ fournit une bonne approximation de la valeur de $f(x)$ tout en étant beaucoup plus facile à calculer. Cette approximation est, dans bien des cas, suffisante et elle est souvent utilisée, en particulier en économie.

En posant $x = a + h$, on obtient :

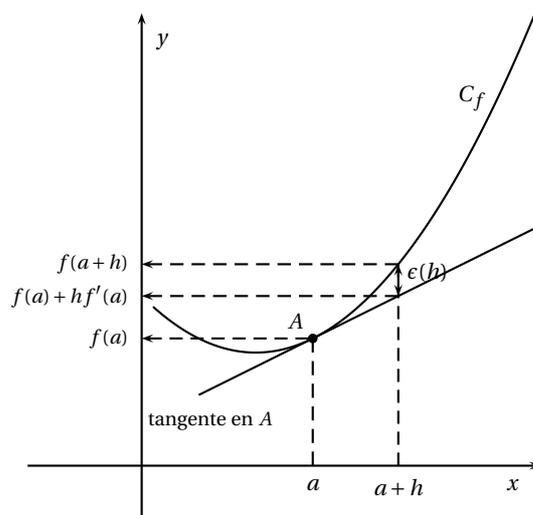
$$g(x) = g(a + h) = f(a) + f'(a)(a + h - a) = f(a) + hf'(a).$$

Et on peut écrire :

$$\text{Quand } h \text{ est proche de } 0, f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$$

Le schéma ci-contre illustre cela :

$\epsilon(h)$ est l'erreur commise lorsqu'on prend $f(a) + hf'(a)$ comme valeur de $f(a + h)$. Elle tend vers 0 quand h tend vers 0.



Exemple 5.2. Application à l'économie.

Un produit coûtant 100 euros au 1er janvier 2006 a augmenté de 2% le 1er février 2006 et le 1er mars 2006.

On peut calculer son coût exact : $100 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 = 104,04$

On peut aussi choisir d'utiliser l'approximation affine de $f(x) = x^2$ au voisinage de 1 : $(1 + h)^2 \approx 1 + 2h$.

Ici, comme h est proche de 0 ($h = \frac{2}{100}$), $1 + 2h$ fournit une approximation souvent suffisante de $(1 + h)^2$ et on a :

$$100 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 \approx 100 \times \left(1 + 2 \times \frac{2}{100}\right) = 104$$

L'erreur commise est donc de 0,04 euros, ce qui peut être, dans certains cas, considéré comme négligeable.

5.5 Exercices

Exercice 5.1.

Tracer une courbe \mathcal{C} représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3; 0]$;
- $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$;
- f est paire ;
- $f(3) = 9$.

Exercice 5.2.

Tracer une courbe \mathcal{C} représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 9]$ ayant les propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$;
- $f(3) = 6$ et $f'(3) = 1$;
- $f(5) = 7$ et $f'(5) = 0$;
- $f(6) = 6$ et $f'(6) = -4$.

Exercice 5.3.

Tracer une courbe \mathcal{C} représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$ ayant les propriétés suivantes :

- $f(0) = 1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0; 2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f'(5) = -1$;
- pour tout $x \in [2; 5]$, $f(x) < 0$.

Exercice 5.4.

Tracer une courbe \mathcal{C} représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4] - 0$ ayant les propriétés suivantes :

- f est impaire ;
- $f(0,25) = 4$ et $f(0,5) = 2$;
- $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$;
- \mathcal{C} admet la droite d'équation $y = x$ comme axe de symétrie.

Exercice 5.5.

Montrer que l'approximation affine de $f(x) = (1+x)^2$ en 0 de l'exemple 5.2 page précédente est la bonne.

Exercice 5.6.

On pose $f(x) = (1+x)^3$ et on cherche $g(x)$, une approximation affine de f au voisinage de 0.

1. Déterminer $g(x)$;
2. Calculer, de tête, $g(x)$ lorsque $x = 0,1$, lorsque $x = 0,01$ et lorsque $x = 0,001$;
3. Calculer $f(x)$ pour chacune de ces valeurs et déterminer l'erreur commise lorsqu'on prend $g(x)$ comme valeur approchée de $f(x)$ pour chacune de ces valeurs de x .

Exercice 5.7.

Déterminer les approximations affines des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$;
2. $g(x) = \sqrt{1+x}$;
3. Calculer, de tête, des valeurs approchées de : $\frac{1}{1,1}$, $\frac{1}{1,02}$, $\frac{1}{0,99}$, $\sqrt{1,1}$, $\sqrt{1,02}$ et $\sqrt{0,99}$.

Exercice 5.8.

On donne page ci-contre la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A , B et C .

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse -2 .
À l'aide d'une approximation affine de f , donner une estimation de $f(-1,9)$

Exercice 5.9.

La courbe \mathcal{C} page suivante est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} , dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :
 - (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
 - (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
 - (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
 - (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
 - (e) L'équation de la tangente T_2 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1; 26)$
 - (a) Déterminer par le calcul une équation de T .
 - (b) En déduire $f'(-2)$.

FIG. 5.2 - Figure de l'exercice 5.8

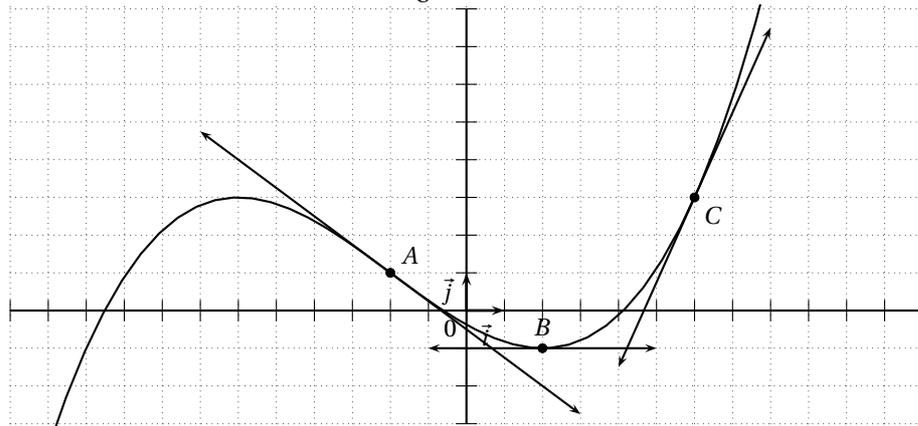
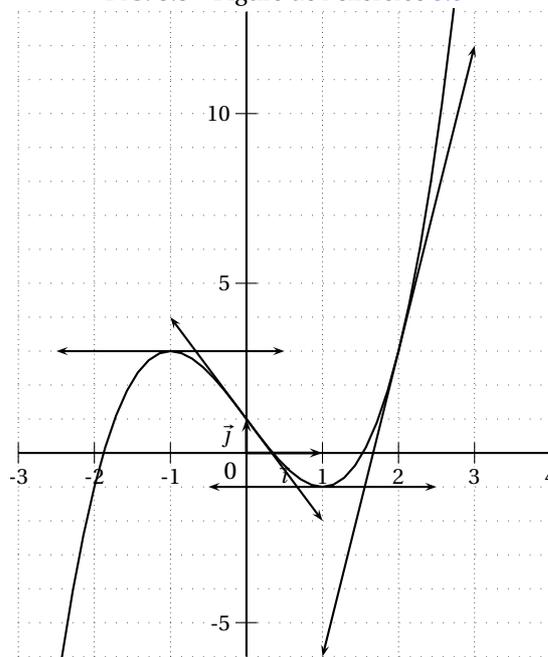


FIG. 5.3 - Figure de l'exercice 5.9



Devoir surveillé n°5

Systèmes – Nombre dérivé

EXERCICE 1

3 points

Résoudre le système \mathcal{S} suivant (*la calculatrice est autorisée*) :

$$\mathcal{S} \begin{cases} 2x + 2y - 2z = -5 \\ x + y + 2z = 2 \\ 3x - y - 4z = -1 \end{cases}$$

EXERCICE 2

10 points

Une couturière fabrique des pantalons suivant deux modèles A et B . Elle dispose de 15 m de tissu par semaine et travaille 40 heures par semaine.

Le modèle A nécessite 1 mètre de tissu et 4 heures de travail.

Le modèle B nécessite 1,50 mètre de tissu et 2 heures de travail.

On note x le nombre de pantalons du modèle A et y le nombre de pantalons du modèle B fabriqués par semaine.

On admet que x et y ne sont pas forcément des nombres entiers car un pantalon peut être débuté une semaine et fini la suivante.

1. Montrer que les productions hebdomadaires de la couturière sont soumises aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 30 \\ 2x + y \leq 20 \end{cases}$$

2. Représenter graphiquement les contraintes de production dans le repère fourni en annexe (page 55).
3. Utiliser le graphique pour répondre aux questions 3a et 3b.
 - (a) Si la couturière produit dans sa semaine 8 pantalons du modèle A , combien de pantalons du modèle B peut-elle produire ?
 - (b) Si la couturière produit dans sa semaine 8 pantalons du modèle B , combien de pantalons du modèle A peut-elle produire ?
4. Sur un pantalon du modèle A , la couturière fait un bénéfice de 60 € et sur un pantalon du modèle B un bénéfice de 40 €. On suppose qu'elle vend toute sa production.
 - (a) Exprimer en fonction de x et y le bénéfice hebdomadaire R qu'elle peut réaliser.
 - (b) Représenter sur le graphique précédent les couples $(x; y)$ qui permettent de réaliser un bénéfice de 240 €.
 - (c) Déterminer graphiquement le nombre de pantalons de chaque modèle à fabriquer par semaine pour que le bénéfice soit maximal.
 - (d) Quel est alors le bénéfice en euros ?
5. Retrouver le résultat de la question 4c par le calcul.

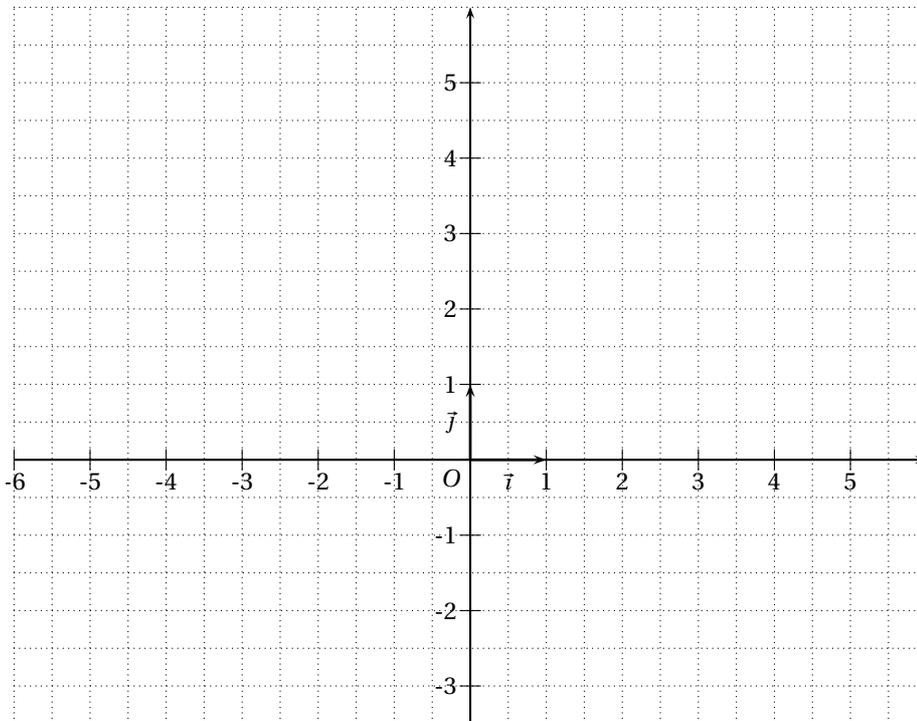
EXERCICE 3

3 points

Tracer sur le repère ci-dessous la représentation graphique \mathcal{C} d'une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

- f est définie sur $[-5; 5]$;
- f est paire ;
- $f(0) = 3, f(2) = 1$ et $f(4) = 2$;
- $f'(0) = 0, f'(2) = -\frac{1}{2}$ et $f'(4) = 3$.

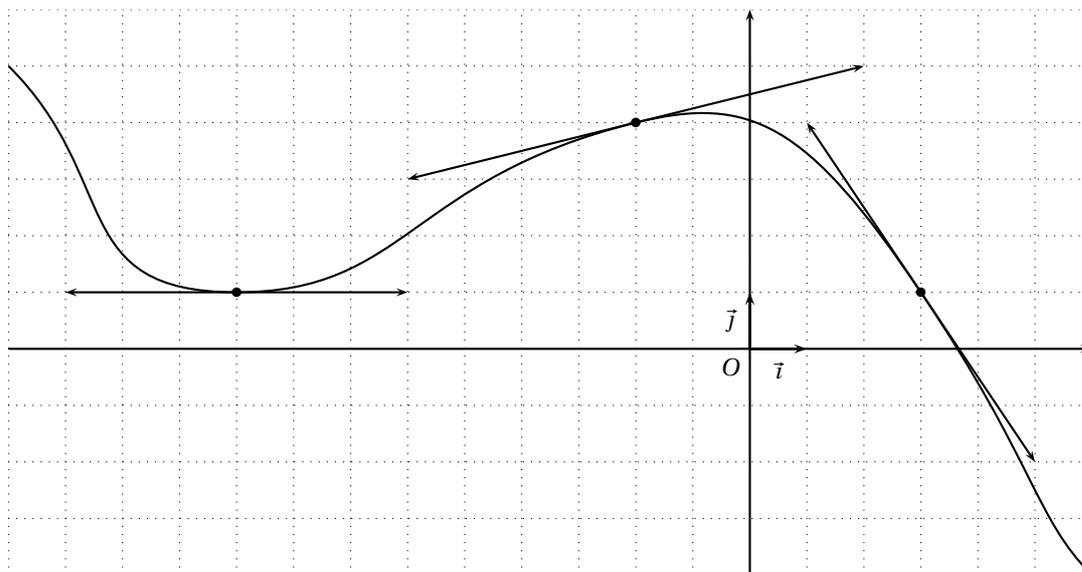
On fera apparaître toutes les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé.



EXERCICE 4

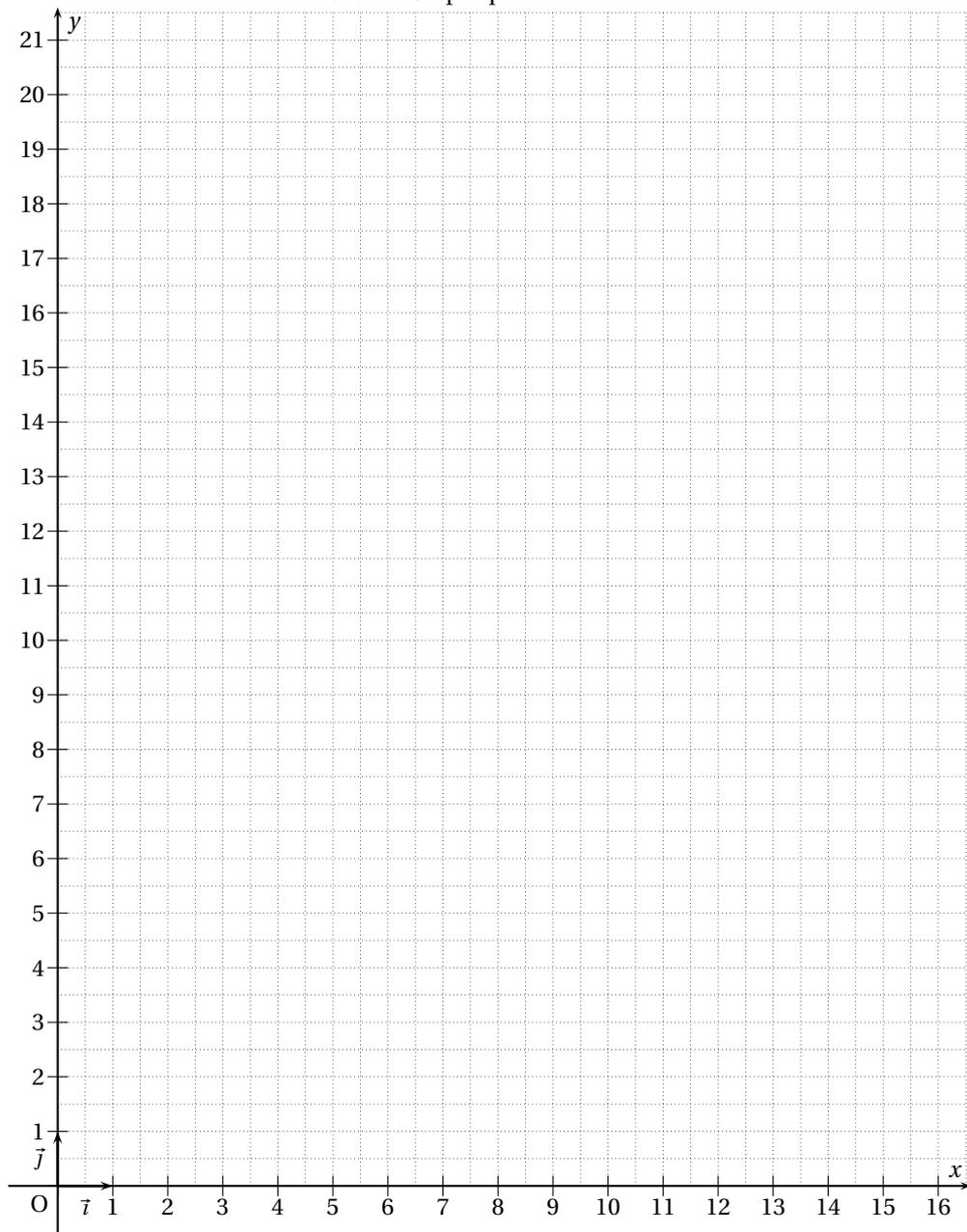
4 points

On donne ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction définie f sur \mathbb{R} ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. (a) Déterminer l'équation réduite de T , la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 3.
 (b) À l'aide d'une approximation affine de f , donner une estimation de $f(3,01)$.

FIG. 5.4 – Graphique de l'exercice 2



Chapitre 6

Fonction dérivée

Sommaire

6.1 Activités	57
6.2 Fonction dérivée	58
6.3 Fonctions dérivées des fonctions usuelles	58
6.4 Opérations sur les fonctions dérivées	58
6.5 Dérivée des fonctions de la forme $f(x) = g(mx + p)$	59
6.6 Variations d'une fonction	59
6.7 Extremum local	60
6.8 Exercices et problèmes	60

6.1 Activités

Activité 6.1 (Plusieurs nombres dérivés).

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Déterminer les valeurs des nombres dérivés en a dans les cas suivants :

- $a = -2$;
- $a = -1$;
- $a = 0$;
- $a = 0,5$;
- $a = 1$.

2. Cas général : déterminer, en fonction de a , la valeur du nombre dérivé.

On obtient ainsi une fonction, qui dépend de f , qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x . Une telle fonction est appelée *fonction dérivée de f* et est notée f' . Ainsi, pour $f(x) = -x^2 + 4$, $f'(x) = -2x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Activité 6.2 (Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles).

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes :

- $f(x) = k$;
- $f(x) = mx + p$;
- $f(x) = x^2$;
- $f(x) = x^3$.

Activité 6.3 (Variations d'une fonction).

Reprenons la fonction de l'activité 6.1 : $f(x) = -x^2 + 4$ et rappelons que le nombre dérivé en x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x .

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice graphique et par lecture graphique, les variations de f en fonction de x .
2. Comment cela se traduit-il pour les coefficients directeurs des tangentes à la courbe ?
3. En déduire un lien entre les variations de f et la fonction dérivée f' .

Activité 6.4 (Extremum local).

On s'intéresse à la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
3. Dresser le tableau des variations de f , en faisant apparaître une ligne indiquant le signe de f' .
4. Qu'observe-t-on en -1 et en 1 , pour f ? Comment cela se traduit-il pour f' ?

On dit que f admet en -1 et en 1 des extremums locaux.

6.2 Fonction dérivée

Définition 6.1. On dit qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre de cet ensemble et on note f' la fonction qui à tout nombre x de cet ensemble associe le nombre dérivé de f en x . Cette fonction s'appelle la *fonction dérivée de f* .

6.3 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

On admettra¹ que les fonctions usuelles ont les fonctions dérivées suivantes :

Propriété 6.1. Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :

Fonction f	définie sur	Fonction dérivée f'	définie sur
$f(x) = k$ (constante)	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = mx + p$	\mathbb{R}	$f'(x) = m$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$

Remarque. Si l'on remarque que $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et que $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$, on a alors :
 $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ a pour fonction dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ainsi, pour obtenir la fonction dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, on peut appliquer l'une ou l'autre formule :

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{2}{x^{2+1}} = -\frac{2}{x^3} \text{ ou } f'(x) = nx^{n-1} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

6.4 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 6.2. Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I .

Fonction	Fonction dérivée	Exemple
ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'	Si $f(x) = 4x^3$ alors $f'(x) = 4 \times (3x^2) = 12x^2$
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ avec $x \neq 0$
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	Si $f(x) = (x^2 - 1)^4$ alors $f'(x) = 4(2x)(x^2 - 1)^3 = 8x(x^2 - 1)^3$
$\frac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1}$ alors $f'(x) = -\frac{6x + 2}{(3x^2 + 2x + 1)^2}$
$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ alors $f'(x) = \frac{(2)(3x+2) - (2x-1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$

Preuve. • Montrons que $(ku)' = ku'$

$$\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = \frac{k[u(a+h) - u(a)]}{h} = k \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc, lorsque h tend vers 0, $\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h}$ tend vers la même chose que $k \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$, c'est-à-dire ku'

• Montrons que $(u+v)' = u' + v'$

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Donc, lorsque h tend vers 0, $\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$ tend vers la même chose que

$$\frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}, \text{ c'est-à-dire } u' + v'$$

¹Certaines démonstrations ont été faites en activité ou seront faites en exercice

- Montrons que $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} = \frac{\frac{u(a) - u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h} = \left(\frac{u(a) - u(a+h)}{h}\right) \frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

Lorsque que h tend vers 0, $\frac{u(a) - u(a+h)}{h}$ tend, par définition, vers $-u'(a)$ et $\frac{1}{u(a+h)u(a)}$ tend vers $\frac{1}{u^2(a)}$, donc

$$\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} \text{ tend vers } -\frac{u'(a)}{u^2(a)}$$

- On admettra que $(uv)' = u'v + uv'$
- Montrons que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

On a vu que $(uv)' = u'v + uv'$, or $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, donc $\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2}$

- On admettra les autres propriétés.

◇

Remarque. Seules les deux premières formules sont intuitives, les autres sont à apprendre par coeur.

En particulier la dérivée d'un produit (ou d'un quotient) n'est pas égal au produit (ou au quotient) des dérivées. Un exemple : cherchons la dérivée de $(x+2) \times (x+3)$

On peut l'obtenir en développant : $(x+2) \times (x+3) = x^2 + 5x + 6$ dont la dérivée est $2x + 5$.

Or la dérivée de chaque facteur est 1, et $1 \times 1 \neq 2x + 5$!

La formule, elle, donne la bonne dérivée $(x+2)'(x+3) + (x+2)(x+3)' = 1 \times (x+3) + (x+2) \times 1 = 2x + 5$.

6.5 Dérivée des fonctions de la forme $f(x) = g(mx + p)$

On admettra le résultat suivant :

Propriété 6.3. Soit $f(x) = g(mx + p)$ où m et p sont des réels et g une fonction définie et dérivable, alors f est dérivable et $f'(x) = mg'(mx + p)$

Exemple 6.1. Soit f définie sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-1}$.

On a $f(x) = g(3x-1)$ avec $g(X) = \sqrt{X}$.

Or $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$ pour $X > 0$.

Donc $f'(x) = 3g'(3x-1) = 3 \frac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ pour $x \in]\frac{1}{3}; +\infty[$

6.6 Variations d'une fonction

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse x est la droite la plus proche de la courbe au voisinage du point de la courbe d'abscisse x .

Il est *naturel* de penser que lorsque la tangente *monte*, la courbe *monte* et que lorsque la tangente *descend*, la courbe *descend*, et réciproquement ou, plus mathématiquement, que lorsque la fonction affine dont la tangente est la représentation graphique est croissante (respectivement décroissante), f est aussi croissante (respectivement décroissante) et réciproquement.

Or la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de son coefficient directeur, ici $f'(x)$. Ainsi, étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x .

On admettra donc le résultat suivant :

Théorème 6.4. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée

- $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ croissante sur I
- $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ décroissante sur I
- $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ constante sur I

On admettra aussi la propriété suivante :

Propriété 6.5. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante)

Remarque. On notera qu'on n'a pas l'équivalence (\Leftrightarrow) dans ce cas, une fonction pouvant être strictement croissante avec une dérivée qui s'annule seulement en quelques valeurs. C'est le cas, par exemple, de la fonction cube, dont la dérivée s'annule seulement en 0.

6.7 Extremum local

Par ailleurs, lorsque la fonction change de sens de variation en a , on dit qu'elle admet un extremum local en a (minimum ou maximum). On a donc :

Propriété 6.6. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée. f' s'annule et change de signe en $a \Leftrightarrow f$ admet un extremum local en a

On l'admettra

On a un maximum lorsque $f'(x)$ est positive avant a et négative après, et un minimum lorsque $f'(x)$ est négative avant a et positive après.

Remarque. Local signifie qu'aux alentours de a ce sera un extremum mais, qu'ailleurs, il se peut que f prenne des valeurs supérieures ou inférieures à cet extremum comme on a pu le voir dans l'activité 6.4 page 57.

6.8 Exercices et problèmes

6.8.1 Exercices

Exercice 6.1.

Montrer que la fonction racine carrée est dérivable en tout nombre appartenant à $]0; +\infty[$ mais pas en 0

Exercice 6.2.

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$

2. $f(x) = \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

3. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$

4. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$

5. $f(x) = (2x+3)(3x-7)$

6. $f(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$

7. $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)^5$

Exercice 6.3.

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^2 + x + 1)^2$

2. $f(x) = (x-1)^2(3-x)^3$

3. $f(x) = (x-1)^4(x+1)^4$

4. $f(x) = x^3(1 + \sqrt{x})$

5. $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$

6. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$

7. $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(x + \sqrt{x})$

8. $f(x) = \sqrt{2-x}$

Exercice 6.4.

Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

1. $f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$;

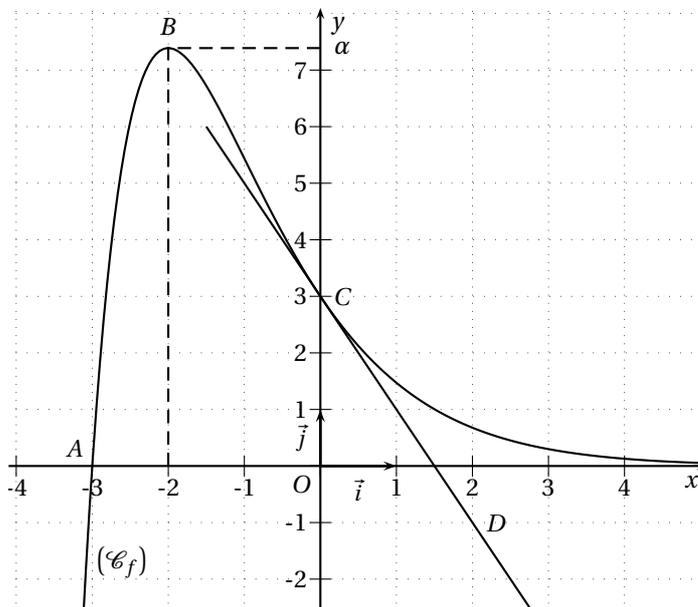
2. $g(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Exercice 6.5.

La courbe (\mathcal{C}_f) de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; +\infty[$.

On donne les renseignements suivants :

- les points $A(-3; 0)$, $B(-2; \alpha)$ où $\alpha \approx 7,39$ et $C(0; 3)$ sont des points de la courbe (\mathcal{C}_f) ;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe (\mathcal{C}_f) en $+\infty$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2; +\infty[$;
- la droite tangente à la courbe (\mathcal{C}_f) en son point C passe par le point $D(2; -1)$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

- $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
- Pour tout x élément de l'intervalle $[-2; +\infty[$, on a : $f'(x) \leq 0$.
- Soit une fonction g telle que $g' = f$ sur l'intervalle $[-4; +\infty[$, alors la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[-2; +\infty[$.

Exercice 6.6.

Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $] -5; +\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-3	-5	4	-4,5

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f .

- Sur l'intervalle $] -5; +\infty[$, l'équation $f(x) = -2$
 - admet une seule solution
 - admet deux solutions
 - admet quatre solutions.
- On sait que $f'(2) = 0$. L'équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 2 est :
 - $y = 4$
 - $y = 4(x - 2)$
 - $x = 4$.
- On sait que l'équation de la tangente à \mathcal{C} au point de coordonnées (1; 2) est $y = 3x - 1$. On a :
 - $f(2) = 1$
 - $f'(1) = -1$
 - $f'(1) = 3$.
- Sur l'intervalle $[-1; 0]$, la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
 - est croissante
 - est décroissante
 - n'est pas monotone.

Exercice 6.7.

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur \mathbb{R} . La courbe Γ passe par les points $O(0; 0)$ et $A(2; 2)$.

La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ . La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

- Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
- Une des représentations graphiques page suivante, représente la fonction dérivée g' de g . Déterminer laquelle.
- Une des représentations graphiques page suivante, représente une fonction h telle que $h' = f$ sur \mathbb{R} . Déterminer laquelle.

Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

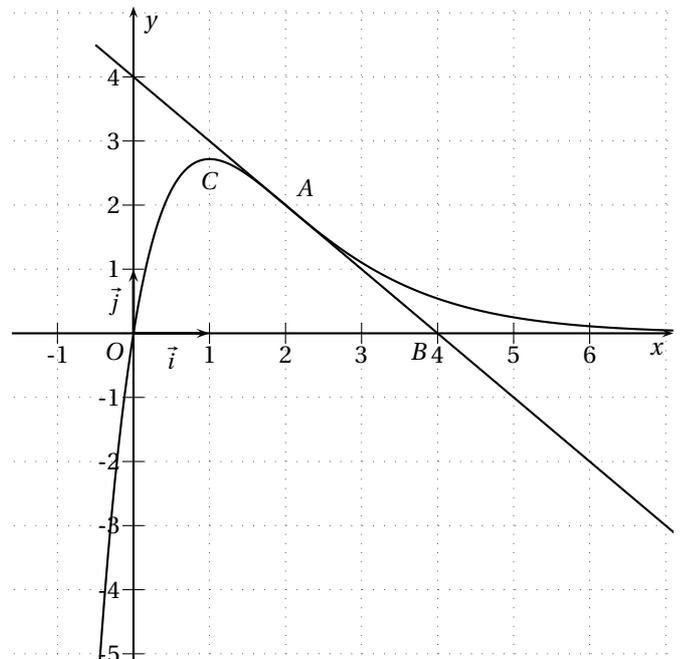
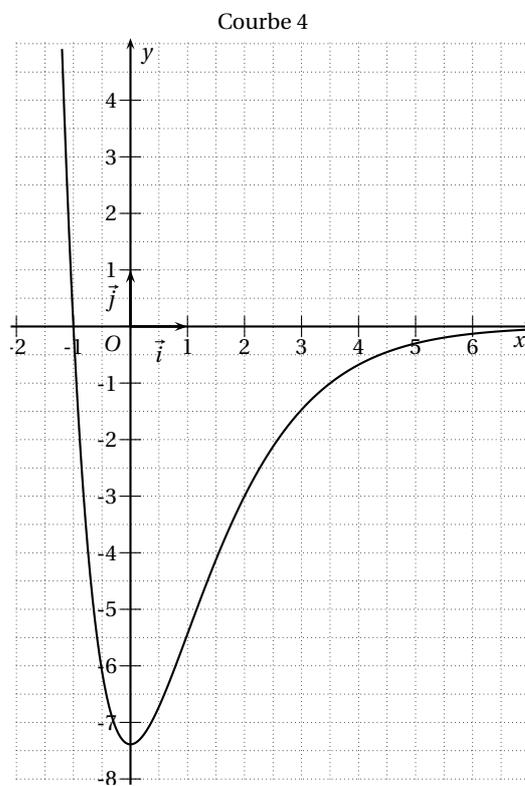
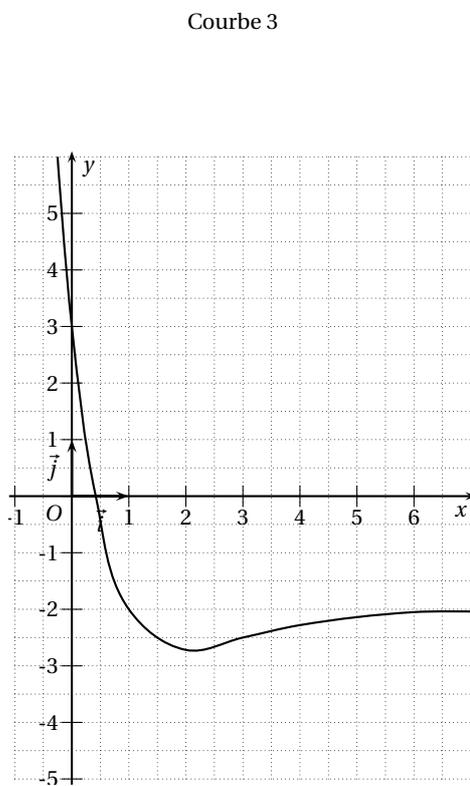
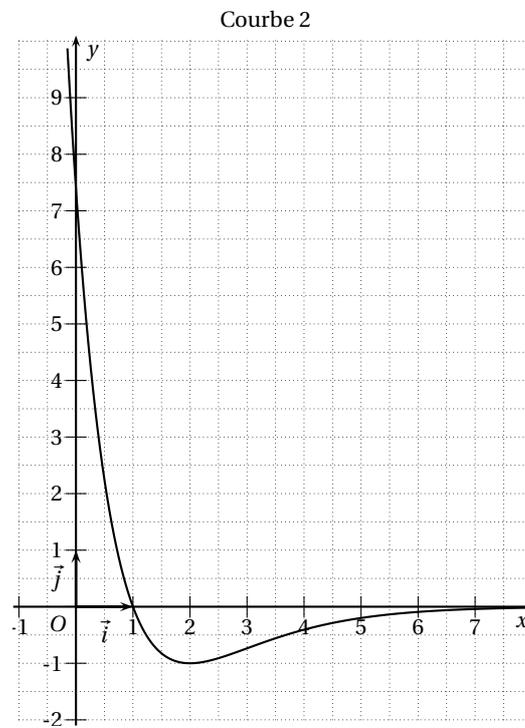
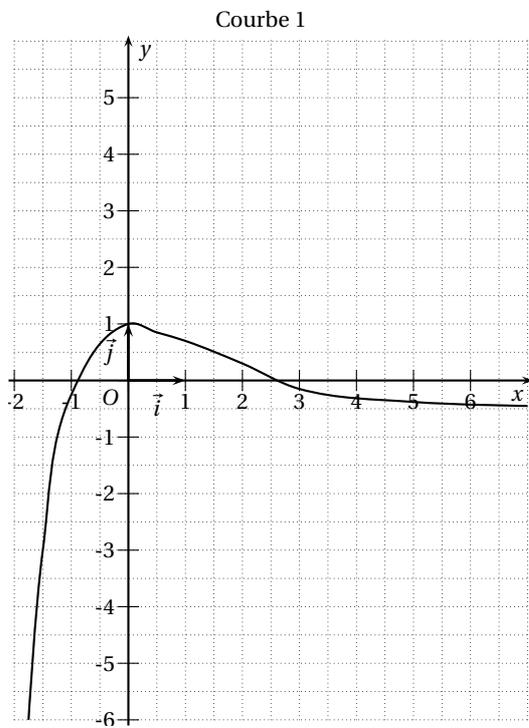


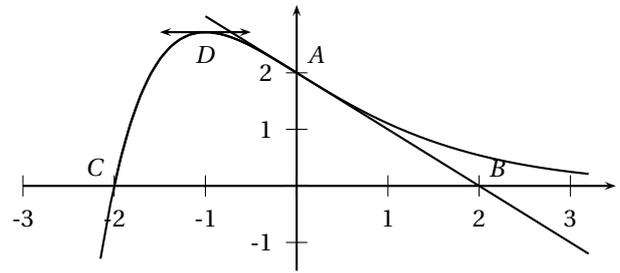
FIG. 6.1 – Courbes de l'exercice 6.7



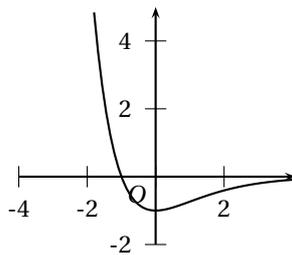
Exercice 6.8.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ , dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur \mathbb{R} . La courbe Γ passe par les points $A(0; 2)$ et $C(-2; 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ . La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

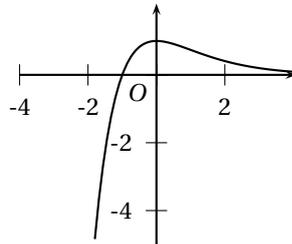
- Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
- Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur \mathbb{R} . Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h . Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix.



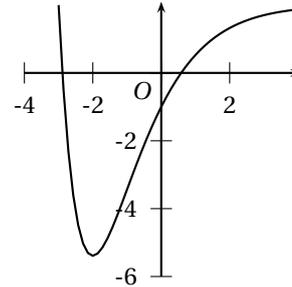
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

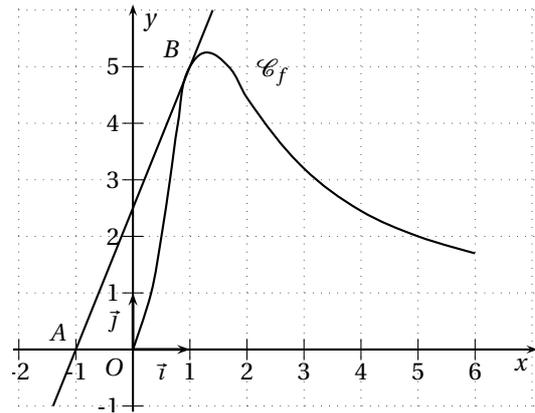


Exercice 6.9.

La courbe \mathcal{C}_f ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 6]$. Soit A le point du plan de coordonnées $(-1; 0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1; 5)$. Le point B appartient à la courbe \mathcal{C}_f .

La droite (AB) est la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point B .

- Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.
- L'une des trois courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , et \mathcal{C}_3 représentées sur les figures 1, 2 et 3 page suivante représente la fonction f' . Laquelle? Justifier votre réponse.



Exercice 6.10.

Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur \mathbb{R} .

- Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
- En déduire les variations de f .
- Dresser le tableau des variations de f en y indiquant le signe de la fonction dérivée.
- Montrer que f admet un extremum.

Exercice 6.11.

On donne $f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 18x - 7$ définie sur $[0; 2]$.

- Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
- En déduire les variations de f .
- Dresser le tableau des variations de f .
- Tracer les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 0, 1 et 2 ainsi qu'aux extremums locaux, puis la courbe de f .

Exercice 6.12.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

- Calculer la dérivée f' de f . Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.
- Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1; 3]$.
- Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

FIG. 6.2 – Courbes de l'exercice 6.9

Figure 1

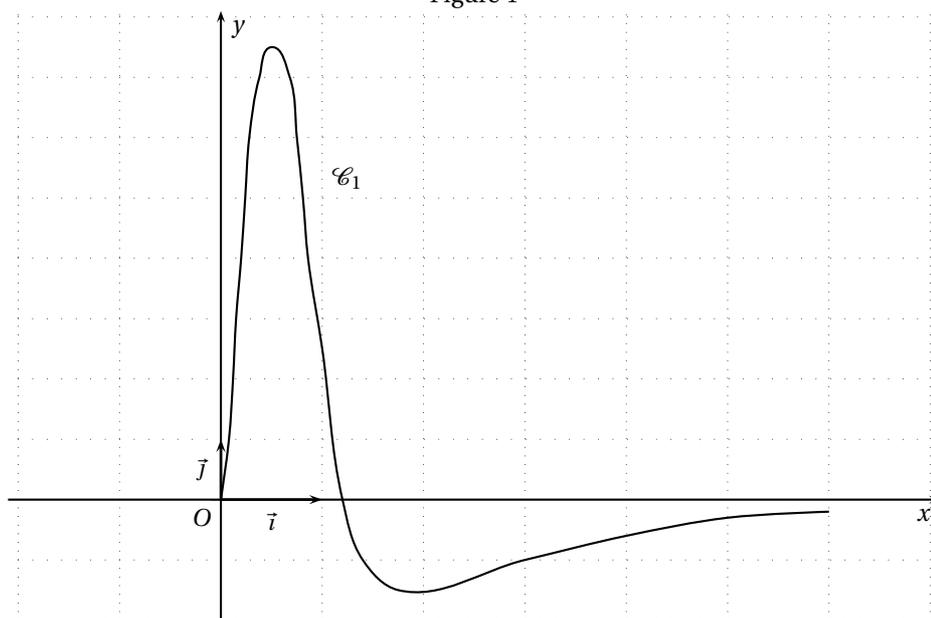


Figure 2

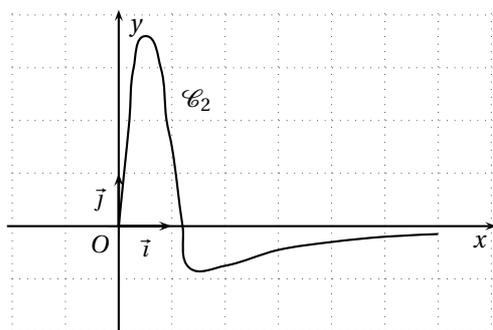
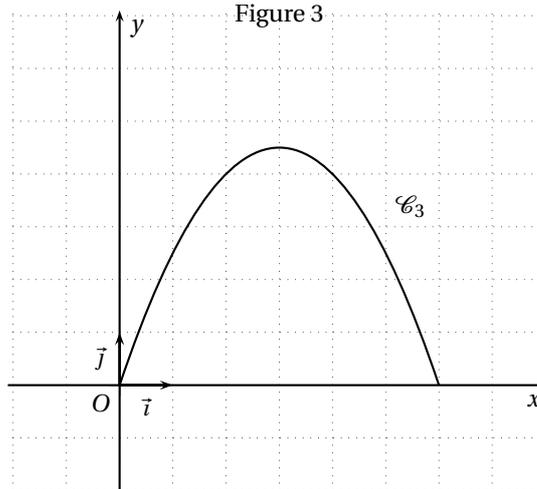


Figure 3



Exercice 6.13.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note \mathcal{C} sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f . Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f .
2. Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
3. Tracer T et \mathcal{C} .
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 3]$.
5. Donner une valeur approchée de α , par défaut, à 10^{-1} près.

Exercice 6.14.

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par : $g(x) = \frac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée g' .
3. Dresser le tableau des variations de g .
4. Déterminer si g admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction g

Exercice 6.15.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

On note \mathcal{C} sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f .
2. Soit A le point d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A , puis une équation de la tangente T_A à la courbe \mathcal{C} en A .
3. Soit B le point d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B , puis une équation de la tangente T_B à la courbe \mathcal{C} en B .
4. Tracer dans un même repère T_A , T_B et \mathcal{C} .

Exercice 6.16.

On considère les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer la dérivée f' de f , étudier son signe et dresser le tableau des variations de f .
2. Faire de même pour g .
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentant les fonctions f et g . (On se limitera à l'intervalle $[-2; 2]$ et on prendra un pas de 0,5).
(b) À l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersection entre \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et leurs coordonnées.
(c) Retrouver ces résultats par le calcul.

Exercice 6.17.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

1. Démontrer que f est une fonction impaire.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
3. Dresser le tableau des variations de f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
4. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4; 4]$.

Exercice 6.18.

On considère les deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

1. Calculer la dérivée f' de f , étudier son signe et en déduire le tableau des variations de f .
2. Calculer la dérivée g' de g , étudier son signe et en déduire le tableau des variations de g .
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentant les fonctions f et g . (On se limitera à l'intervalle $[-3; 5]$ et on prendra un pas de 0,25).
(b) À l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersections entre \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et leurs coordonnées.
(c) Retrouver ces résultats par le calcul.

Exercice 6.19.

Question préliminaire : factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = -2x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Étudier la parité des fonctions f et g .
2. Calculer les dérivées f' et g' . Étudier leur signe.
3. Dresser les tableaux des variations des fonctions f et g .
4. Tracer les représentations graphiques \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g des fonctions f et g . (On se limitera à l'intervalle $[-3; 3]$).
5. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \leq g(x)$. (On pourra utiliser la question préliminaire).

Exercice 6.20.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

On appelle \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f .
3. Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de \mathcal{C} où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de \mathcal{C} où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de \mathcal{C} où la tangente a pour coefficient directeur -3.
7. (a) Déterminer une approximation affine locale au voisinage de 2.
(b) En déduire une valeur approchée de $f(2,003)$ et de $f(1,996)$.
8. Démontrer que le point $\Omega(1; -1)$ est centre de symétrie de \mathcal{C} .

6.8.2 Problèmes

Problème 6.1.

On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

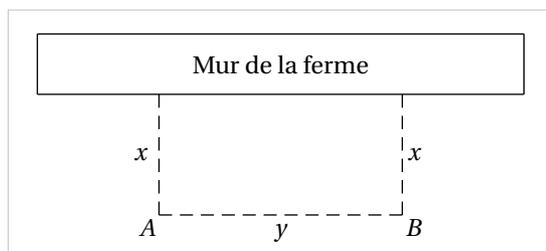
- Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm²
- On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
 - Exprimer S en fonction de l
 - On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x(2 - x)$.
Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f . Tracer sa représentation graphique \mathcal{C} sur l'intervalle $[0; 2]$.
 - En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

Problème 6.2.

Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m². Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?

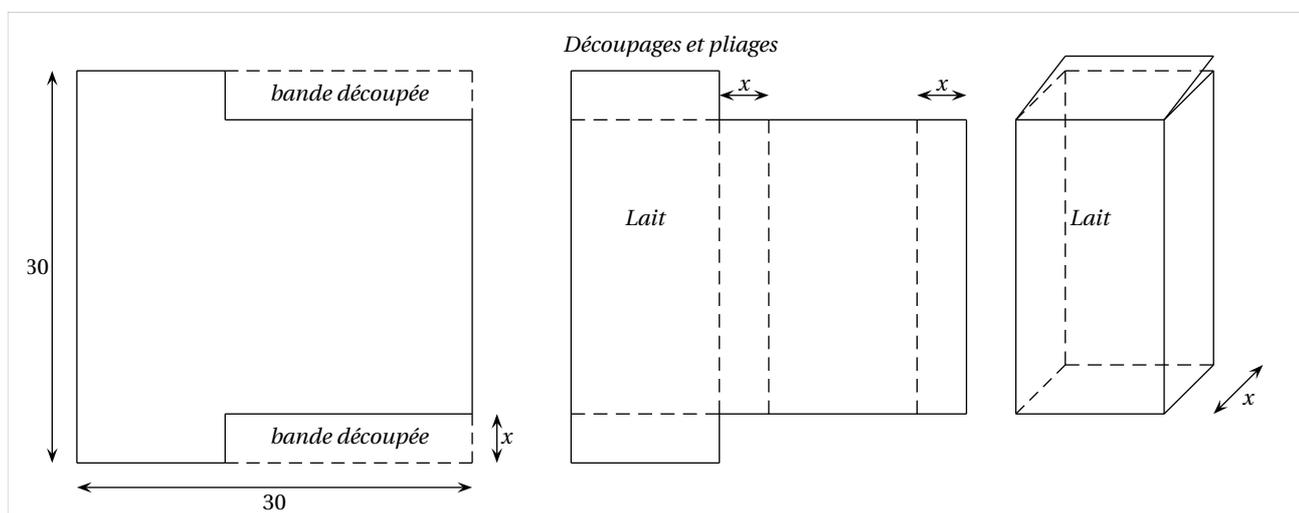
La figure ci-dessous représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les deux piquets A et B . (On a donc $x > 0$ et $y > 0$).

- Sachant que l'aire du poulailler est de 392 m², exprimer y en fonction de x .
- Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \frac{2x^2 + 392}{x}$
- Calculer la dérivée l' de l , en déduire le tableau des variations de l .
- En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.



Problème 6.3. 1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$

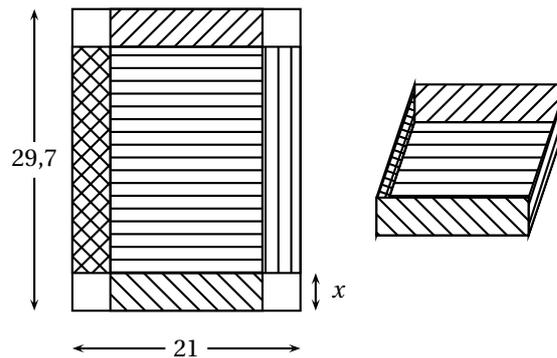
- Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 20]$. Dresser le tableau des variations de f .
 - Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.
 - Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.
 - Tracer Δ et la représentation graphique de f pour $x \in [0; 20]$.
- Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir la figure de la présente page). Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.
 - Démontrer que le volume (en cm³) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
 - Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.



Problème 6.4.

On dispose d'une feuille de dimensions $21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$ avec laquelle on veut fabriquer une boîte sans couvercle. Pour cela on découpe aux quatre coins de la feuille un carré de côté x . On obtient le patron de la boîte. On se propose d'étudier le volume de la boîte en fonction de x .

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. On appelle $V(x)$ le volume de la boîte.
 - (a) Montrer que $V(x) = x(29,7 - 2x)(21 - 2x)$.
 - (b) Étudier les variations de V .
 - (c) En déduire la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) le volume de la boîte est maximum. *On donnera le(s) résultat(s) au millimètre.*



Problème 6.5.

Quel doit être le format (hauteur, rayon) d'une boîte de conserve cylindrique pour que, pour un volume donné, la quantité de métal pour la concevoir, qu'on supposera proportionnelle à sa surface, soit minimale.

Problème 6.6.

Soit \mathcal{C} la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 3.
3. Déterminer l'abscisse de l'autre point de \mathcal{C} où la tangente est horizontale.

Problème 6.7.

Une parabole \mathcal{P} admet, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une équation du type : $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Déterminer les coefficients a , b et c sachant que \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnées 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x + 2$ pour tangente. Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de \mathcal{P} avec l'axe des abscisses.

Problème 6.8.

Une entreprise fabrique x portes blindées par jour, x variant de 0 à 120. On estime que le coût total de fabrication, noté $C(x)$, est donné, en euros, par : $C(x) = 0,001x^3 - 0,1x^2 + 95x + 1500$.

La recette de l'entreprise obtenue par la vente de x portes, notée $R(x)$, en euros, est donnée par : $R(x) = 228x$.

On suppose que chaque porte est vendue.

1. Étude de la fonction bénéfice
 - (a) Exprimer $B(x)$ en fonction de x .
 - (b) Calculer $B'(x)$ pour tout x de $[0; 120]$.
 - (c) Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction B .
 - (d) À l'aide du tableau de variation et d'un tableau de valeurs donné par la calculatrice, donner les arrondis au dixième des solutions de l'équation $B(x) = 0$.
En déduire le nombre de portes vendues pour que la fabrication soit rentable. Justifier votre réponse.
 - (e) Pour quel nombre de portes vendues, le bénéfice est-il maximal ? Justifier votre réponse.
2. Courbe représentative de la fonction B
 - (a) Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction B .
 - (b) Vérifier graphiquement vos réponses aux questions d) et e) de la partie 1.

Problème 6.9.

Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production. Les coûts de production sont, d'une part, les coûts fixes (amortissement du four, assurances, etc.), d'autre part, les coûts variables (ingrédients, salaires, etc.) qui dépendent du nombre q de lots fabriqués.

On estime que la fonction de coût total de cette entreprise est donnée par la fonction suivante :

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20$$

où q est le nombre de lots fabriqués et $C(q)$ est exprimé en dizaine d'euros.

1. Études du coût marginal et du coût total.

Le coût marginal, noté $C_m(q)$ est, pour une quantité q donnée, l'augmentation du coût occasionnée par la production d'une unité supplémentaire. Sa valeur exacte est donc $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ mais dans la pratique on prend la valeur approchée $C_m(q) = C'(q)$, la différence entre les deux valeurs étant négligeable.

(a) Étudier les variations de la fonction C sur l'intervalle $[1; 8]$.

(b) Étudier les variations de la fonction C' sur l'intervalle $[1; 8]$.

(c) Représenter graphiquement, dans le même repère, les fonctions C et C' (unités graphiques : 2 cm pour un lot en abscisses et 1 cm pour 5 dizaines d'euros en ordonnées).

2. Étude du coût moyen.

Le coût de production par unité produite est appelé coût moyen de production ; on le note généralement $C_M(q)$.

On a donc $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

(a) Une fonction auxiliaire

Soit $D(q)$ la fonction définie sur $[1; 8]$ par $D(q) = q^3 + 6q^2 - 20$

i. Étudier les variations de $D(q)$ puis dresser son tableau de variations.

ii. En déduire que l'équation $D(q) = 0$ admet une unique solution q_0 dans $[1; 8]$.

iii. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de q_0 au dixième.

(b) Expliquer pourquoi l'entreprise à tout intérêt à produire une quantité telle que $C_M(q)$ soit minimale.

(c) Montrer que $C'_M(q) = \frac{q^3 + 6q^2 - 20}{q}$

(d) Dresser le tableau des variations de C_M

(e) En déduire la production optimale de l'entreprise.

(f) i. Représenter C_M dans le même graphique que C et C_m .

ii. Déterminer l'abscisse du point d'intersection des courbes de C_M et C_m .

Que constate-t-on ? *Cette propriété est toujours vraie.*

3. Concurrence parfaite.

Dans cette partie on suppose que l'on est en situation de concurrence parfaite, c'est-à-dire que le prix de vente est imposé par le marché.

Le prix de vente du lot est calculé à partir du prix de vente unitaire fixé à 7,5 € la pizza.

(a) Calculer le prix de vente d'un lot de pizzas.

Quelle est la recette $R(q)$, en dizaines d'euros, pour q lots vendus ?

(b) Sur le même graphique que précédemment, tracer la droite d'équation $y = 30$.

(c) « Tant que le coût marginal est inférieur au prix de vente, l'entreprise à intérêt à produire. »
Expliquer pourquoi.

(d) Le bénéfice produit par la vente de q lots de pizzas est $B(q) = R(q) - C(q)$.

Étudier les variations de la fonction B et en déduire la production qui assure le bénéfice maximal.

Que représente cette production sur le graphique précédent ?

Devoir surveillé n°6

Fonction dérivée

EXERCICE 1

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^3$ définie et dérivable sur \mathbb{R} .
- $g(x) = x^3(1 + \sqrt{x})$ définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.
- $h(x) = \frac{x+1}{x-3}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

EXERCICE 2

Partie A

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage.

Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121 \text{ où } x \text{ est compris entre 1 et 30.}$$

Le coût moyen de production d'un objet est donné par $f(x) = \frac{C(x)}{x}$.

- Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 121}{x^2}$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1; 30]$.
- Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. *On arrondira à 10^{-1} les valeurs.*

x	1	2	4	8	11	15	20	25	30
$f(x)$						83,1		89,8	

- Construire la courbe représentative de f dans un repère orthogonal sur papier millimétré (unités graphiques : 1 cm = 2 objets en abscisses ; 1 cm = 10 € en ordonnées).

Partie B

L'artisan vend chaque objet 110 €.

- Montrer que le bénéfice réalisé après la fabrication et la vente de x objets est donné par :

$$B(x) = -x^2 + 50x - 121 \text{ où } x \text{ est pris dans } [1; 30].$$

- Calculer $B'(x)$ et étudier son signe.
- Dresser le tableau de variations de la fonction B et en déduire le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
Donner ce bénéfice maximal.

EXERCICE 3

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 11x + 28}{x - 3}$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère du plan.

On donne en annexe page suivante un repère dans lequel une partie de \mathcal{C} est déjà tracée.

- f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f .
 - Justifier que $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2}$.
 - Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
- Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de \mathcal{C} où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
 - Soit T la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T .
- Déterminer les abscisses x_1 et x_2 des points d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.
 - Déterminer $f'(x_1)$ et $f'(x_2)$. À quoi correspondent ces deux nombres ?
- Sur le repère donné en annexe page 70 :
 - Placer les points correspondants aux extremums locaux, le point d'abscisse 0 et enfin les points d'intersection obtenus à la question ??.
 - Tracer les tangentes à la courbe en ces cinq points
 - Compléter le tracé de \mathcal{C} .

FIG. 6.3 – Annexe de l'exercice 1

