Chapitre 10

Placements à intérêts simples ou composés Annuités

Sommaire

10.1 Intérêts simples

Dans le cas de certains placements à court terme (inférieur à un an) ou pour des emprunts d'État, on pratique des intérêts simples, proportionnels à la durée du placement.

10.1.1 Valeur acquise par un capital placé

Définition 10.1. Placer un capital C_0 avec *intérêts simples* au taux t *sur une période* (un jour, un mois, un trimestre, etc.), signifie que, *pour chaque période*, l'intérêt perçu est le même et égal à $C_0 \times t$.

Propriété 10.1. *Soit t le taux d'intérêts simples sur une période (un jour, un mois, un trimestre, etc.).*

- *La valeur acquise C_n du capital pour le placement d'un capital C_0 sur une durée de n périodes est $C_n = C_0(1 + t \times n)$.*
- *L'intérêt acquis I_n par ce capital est $I_n = C_n - C_0 = C_0 \times t \times n$.*

Remarque. Les capitaux disponibles successifs au bout d'une période, de deux périodes, ..., de n périodes : $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont les termes successifs d'une suite arithmétique de premier terme C_0 et de raison $C_0 \times t$.

Exemple 10.1. On place un capital de 2 500 € à intérêts simples au taux mensuel de 0,5 %. Calculer le montant du capital et l'intérêt perçu au bout d'un an.

10.1.2 Calcul d'un taux proportionnel

Propriété 10.2. *Placer une somme aux taux annuel t_a, revient à placer cette somme à intérêts simples au taux mensuel proportionnel $t_m = \frac{t_a}{12}$.*

Exemple 10.2. On place 1 500 € à intérêts simples pour une période de 2 mois au taux annuel de 3 %. Calculer l'intérêt perçu au bout de 2 mois si l'on applique un taux proportionnel.

10.2 Intérêts composés

Dans le cas de placements à long terme, on pratique des intérêts composés.

10.2.1 Valeur acquise par un capital placé

Définition 10.2. Placer un capital C_0 avec intérêts composés au taux t sur une période (un jour, un mois, un trimestre, etc.), signifie que les intérêts d'une période s'ajoutent au capital et que, la période suivante, ils rapportent eux aussi des intérêts.

Propriété 10.3. *Soit t le taux d'intérêts composés sur une période (un jour, un mois, un trimestre, etc.).*

- *La valeur acquise C_n du capital pour le placement d'un capital C_0 sur une durée de n périodes est $C_n = C_0(1+t)^n$.*
- *L'intérêt acquis par ce capital est $I_n = C_n - C_0 = C_0\left[(1+t)^n - 1\right]$.*

Remarque. Les capitaux disponibles successifs au bout d'une période, de deux périodes, ..., de n périodes : C_1, C_2, ..., C_n sont les termes successifs d'une suite géométrique de premier terme C_0 et de raison $1+t$.

Exemple 10.3. On place 250 € à intérêts composés au taux annuel de 3,5 %. Calculer le montant du capital et l'intérêt perçu au bout de 10 ans.

10.2.2 Valeur actuelle d'un capital placé

Définition 10.3. La valeur actuelle d'un capital C_n, obtenu après n périodes, « au taux d'actualisation t », est le capital C_0 qu'il faut placer au taux t avec intérêts composés, pendant n périodes, pour obtenir une valeur acquise C_n du capital.

Propriété 10.4. *La valeur actuelle C_0 d'un capital C_n obtenu après n périodes, « au taux d'actualisation t », est $C_0 = C_n(1+t)^{-n}$.*

Exemple 10.4. Déterminer la valeur actuelle C_0 d'un capital placé à intérêts composés aujourd'hui au taux annuel de 1,25 % qui aura la valeur acquise de 12 000 € dans 5 ans.

10.2.3 Taux équivalent

Propriété 10.5. *Dans le cas d'un intérêt mensuel t_m, le taux d'intérêt correspondant à un placement annuel est le taux équivalent t_a.*
De la même façon, à un taux annuel t_a correspond un taux mensuel t_m équivalent.
Le passage de l'un à l'autre s'effectue à l'aide de la formule : $1+t_a = (1+t_m)^{12}$.

Remarque. Si $1+t_a = (1+t_m)^{12}$, alors $1+t_m =$ ....
Ainsi t_m est le taux ....

Exemple 10.5. On place un capital à intérêts composés.

1. Calculer le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 0,3 %.

2. Calculer le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 8 %.

10.3 Annuités

10.3.1 Définitions et notations

Définition 10.4. Une annuité est une somme d'argent versée chaque période, en général d'un an :

- par un épargnant pour se constituer une épargne ;

- par un emprunteur pour rembourser un emprunt ou une dette.

Une annuité a est constante lorsque la somme d'argent versée chaque période est la même.

Remarque. Par définition du terme la période de versement de l'annuité est d'un an. Si la période de versement est d'un mois, par exemple, on devrait rigoureusement parler alors d'une mensualité mais pour simplifier les choses pour la suite on ne parlera que d'annuités (de période un an, un mois, etc.).

10.3.2 Valeur acquise par une suite d'annuités constantes de placement

Pour constituer un capital, on place à la fin de chaque période, pendant n périodes, une annuité constante a à intérêts composés (ou capitalisés) au taux t.
Après n périodes on calcule la valeur acquise par chaque annuité versée

Période	1	2	3	...	$n-1$	n
Versement	a	a	a	...	a	a
Valeur acquise par ce versement après n périodes	$a(1+t)^{n-1}$	$a(1+t)^{n-2}$	$a(1+t)^{n-3}$	...	$a(1+t)^1$	a
Numérotation	u_n	u_{n-1}	u_{n-2}	...	u_2	u_1

Les valeurs acquises par ces annuités sont les termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme (en les rangeant dans l'ordre inverse) $u_1 = a$ et de raison $q = 1 + t$.
La valeur acquise v_n par cette suite d'annuités est donc

$$v_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = a \times \frac{1-q^n}{1-q} = a \times \frac{1-(1+t)^n}{1-(1+t)} = a \times \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Propriété 10.6. *La valeur acquise par le capital placé, au moment du dernier versement, est*

$$v_n = a \times \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

L'annuité constante de placement est

$$a = v_n \times \frac{t}{(1+t)^n - 1}$$

Exemple 10.6. On place pendant 8 ans, à la fin de chaque année, une somme égale à 3 500 €, soit une annuité constante sur un compte rémunéré à 3,5 % par an avec intérÃªês composés. Quelle est la valeur acquise de cette suite d'annuités ?

10.3.3 Valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de remboursement d'un emprunt

Dans le cas d'un emprunt de n annuités constantes égales à a, au taux t sur une période, le capital emprunté v_0 est la valeur actuelle, au taux d'actualisation t, de la suite des n annuités constantes (égales à a), avant le versement de la 1[ère] annuité.

Période	1	2	3	...	$n-1$	n
Versement	a	a	a	...	a	a
Valeur actuelle de ce versement	$a(1+t)^{-1} = \frac{a}{1+t}$	$a(1+t)^{-2}$	$a(1+t)^{-3}$	...	$a(1+t)^{-n+1}$	$a(1+t)^{-n}$
Numérotation	v_1	v_2	v_3	...	v_{n-1}	v_n

Les valeurs actuelles de ces annuités sont les termes d'une suite géométrique (v_n) de premier terme $v_1 = \frac{a}{1+t} = a(1+t)^{-1}$ et de raison $q = \frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1}$.
La valeur acquise v_0 par cette suite d'annuité est donc $v_0 = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

$$\begin{aligned} v_0 &= v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1+t} \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{1-(1+t)^{-1}} = \frac{a}{1+t} \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{1-\frac{1}{1+t}} = \frac{a}{1+t} \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{\frac{1+t-1}{1+t}} = \frac{a}{1+t} \times \left(1-(1+t)^{-n}\right) \frac{1+t}{t} \\ &= a \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t} \end{aligned}$$

Propriété 10.7. *La valeur actuelle du capital emprunté une période avant le premier versement est*

$$v_0 = a \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

L'annuité constante de remboursement est

$$a = v_0 \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$$

Exemple 10.7. On a emprunté 100 000 € au début 2014, pour acheter un logement aux taux d'intérêts annuel de 3,95 % sur 15 ans. Cet emprunt est à annuités constantes.

1. Vérifier que le montant de l'annuité, arrondi au centime, est de 8 962,69 €.
2. Calculer le montant total des intérêts versés à l'organisme de crédit après le versement de la dernière annuité, c'est-à-dire le coût du crédit.

10.3.4 Amortissement d'un emprunt par annuités constantes

Le remboursement d'une dette implique le versement, à chaque échéance, de l'annuité qui se compose de deux éléments :

- Le remboursement d'une partie de la somme empruntée, appelée *amortissement* ;
- Les intérêts portant sur le capital restant dû, calculés en utilisant le taux d'intérêt de l'emprunt.

L'annuité est donc la somme de l'amortissement et des intérêts pour la période considérée.

Tableau d'amortissement

Période	Dette en début de période	Intérêt dû (1)	Amortissement (capital remboursé) (2)	Annuité (montant versé) (3)	Dette en fin de période
1	v_0	$I_1 = v_0 \times t$	$A_1 = a - I_1$	a	$v_1 = v_0 - A_1$
2	v_1	$I_2 = v_1 \times t$	$A_2 = a - I_2$	a	$v_2 = v_1 - A_2$
...	...	...	...	...	...
n	v_{n-1}	$I_n = v_{n-1} \times t$	$A_n = v_{n-1}$	a	$v_n = 0$
-	-	Coût du crédit	Montant total remboursé v_0	Montant total versé	-
-	-	$I_1 + I_2 + \ldots + I_n$	$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$	$n \times a$	-

(1) Intérêt pour une période = dette de début de période × taux d'intérêt.
(2) Amortissement du capital = annuité d'une période − intérêts dus pour la période concernée.
(3) Annuité constante.
(4) Dette en fin de période = dette en début de période − amortissement du capital.

Vérifications

La dette doit être totalement remboursée à la fin du plan de remboursement, soit $v_n = 0$.
La somme des amortissements est égale au montant de la dette, soit $v_0 = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.
La somme des intérêts + la somme des amortissements = la somme des annuités.

Exemple 10.8. On reprend les données de l'exemple précédent. On admet que les amortissements sont les termes d'une suite géométrique (A_n) de premier terme $A_1 = a(1+t)^{-n}$ et de raison $(1+t)$.

1. Calculer la somme $S = A_1 + A_2 + \ldots + A_{15}$. Arrondir à l'euro.
2. Quelle remarque peut-on faire ?

10.4 Exercices

10.4.1 Intérêts simples ou composés

EXERCICE 10.1.
On place un capital $C_0 = 150\,000$ € en emprunts d'État à 1,18 % annuel par intérêts simples.
On note C_n le capital obtenu ou « valeur acquise », au bout de n années.

1. Calculer C_1, C_2, C_3.
2. (a) Donner pour tout entier naturel n, l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
   (b) En déduire que la suite (C_n) sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme C_0 et dont on précisera la raison.
   (c) Donner l'expression de C_n en fonction de n.
   (d) Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il augmenté de 20 % ?

EXERCICE 10.2.
On place un capital $C_0 = 2\,000$ € en « obligations » à 3,41 % par an, avec intérêts simples, pendant 10 ans. Calculer le capital disponible au bout des 10 ans.

EXERCICE 10.3.
On place un capital $C_0 = 1\,000$ € à 4 % par an avec intérêts composés.
On note C_n le capital obtenu ou « valeur acquise », au bout de n années.

1. Calculer C_1, C_2, C_3.
2. (a) Donner pour tout entier naturel n, l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.
   (b) En déduire que les nombres C_0, C_1, C_2, ..., C_n sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme C_0 et dont on précisera la raison.
   (c) Donner l'expression de C_n en fonction de n. Calculer C_{17} et C_{18}.
3. Au bout de combien d'années le capital initial aura-t-il doublé ?

EXERCICE 10.4. 1. Calcul de la valeur acquise

   (a) Calculer la valeur acquise par un capital C de 2 500 € placé à intérêts composés pendant 4 ans au taux trimestriel de 1 %.
   (b) En déduire le montant des intérêts acquis. Arrondir au centime d'euros.

2. Calcul de taux
   Déterminer à quel taux annuel il faut placer, à intérêts composés, une somme de 10 000 € pour que sa valeur acquise au bout de trois ans de placement soit de 12 000 €.

EXERCICE 10.5.
Deux sociétés A et B proposent à ses clients les placements suivants :

- A propose des intérêts composés de 4,8 % par an ;
- B propose des intérêts composés de 0,40 % par mois.

Dans les deux cas, les intérêts sont ajoutés au capital à la fin de chaque période de référence : année pour A et mois pour B.

1. Si un client place un capital de 100 000 €, que sera devenu ce capital au bout d'une année dans les deux cas ?
2. Laquelle des deux sociétés offre le placement le plus avantageux pour les clients ?

EXERCICE 10.6.
Déterminer la somme d'argent S, en euros, qu'il fallait placer au 01/01/2006, au taux annuel de 3,75 % avec intérêts composés, pour disposer d'un capital C de 100 000 € au bout de 10 ans, le 01/01/2016. Arrondir au centime d'euro.
S est la valeur actuelle, au taux annuel de 3,75 %, d'un capital disponible de 100 000 € dans 10 ans.

EXERCICE 10.7.
Déterminer la valeur actuelle C_0 du capital C_{10} qui, placé à intérêts composés aujourd'hui au taux annuel de 3,70 %, vaudra 5 000 € dans 10 ans.

EXERCICE 10.8.
On a placé 1 500 € sur un compte épargne il y a quatre ans, jour pour jour à intérêts composés, au taux annuel de 3,25 %. On souhaite disposer d'une somme de 2 000 € dans trois ans.

1. Déterminer la somme S_1 dont on dispose aujourd'hui sur le compte épargne, intérêts compris.
2. Déterminer le montant des intérêts perçus au bout de quatre ans.
3. Déterminer la somme S_2 qu'il faut déposer aujourd'hui sur le compte épargne pour disposer sur ce compte de 2 000 € dans deux ans.

EXERCICE 10.9.
On place un capital initial $C_0 = 10000$ € à intérêts composés au taux annuel i.
On note C_n le capital disponible au bout de n années.
On recherche un algorithme permettant de déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle le capital disponible C_n est supérieur ou égal à 20 000 €.

1. On suppose dans cette question que le taux d'intérêt annuel est de 4 %, c'est-à-dire $i = 0,04$. Calculer C_1 et C_2.
2. Soit i un nombre réel positif.
   (a) Exprimer C_1 en fonction de i, puis C_2 en fonction de C_1 et de i.
   (b) Soit n un nombre entier non nul. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n et i. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?
3. On considère l'algorithme suivant :

```
ENTREE : Saisir i
INSTRUCTIONS :
 n prend la valeur 0
 C prend la valeur 10 000
 Tant que C < 20 000
  n prend la valeur n+1
  C prend la valeur (1+i)*C
 Fin Tant que
SORTIE : Afficher n
```

(a) Quel est le test d'arrêt de la boucle de cet algorithme ? Quand on sort-on de la boucle ?

(b) Compléter le tableau suivant, en indiquant les valeurs de la variable C et du test lorsqu'on saisit dans l'algorithme $i = 0{,}04$.

		C	$C < 20000$
Initialisation	$n = 0$	10000	Vrai
Boucle	$n = \ldots\ldots$		
	$n = \ldots\ldots$		

4. Programmer cet algorithme sur la calculatrice et le faire fonctionner. Vérifier que pour $i = 0{,}04$, l'affichage en sortie est $n = 18$.

5. Au bout de combien d'années le capital initial est-il doublé lorsque le taux de placement à intérêts composés est 3,5 % ? 4,5 % ?

Exercice 10.10.
On possède un capital de 20 000 € que l'on place à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %.
On considère l'algorithme suivant :

```
ENTREE : Saisir S
INSTRUCTIONS :
 n prend la valeur 0
 C prend la valeur 20 000
 Tant que C<S
  n prend la valeur n+1
  C prend la valeur 1,025*C
 Fin Tant que
SORTIE : Afficher n
```

1. (a) Justifier la ligne : C prend la valeur 1,025*C
   (b) Quelle est la nature de la suite des valeurs de la variable C ?
   (c) À quoi correspond la variable C dans l'algorithme ?
   (d) À quelle condition sort-on de la boucle ?

2. Programmer cet algorithme avec la calculatrice, et vérifier que, lorsqu'on entre pour S la valeur 30 000, l'algorithme affiche en sortie la valeur 17.
   Quel est le rôle de l'algorithme ?

3. Déterminer, à l'aide de l'algorithme, le nombre d'années nécessaires pour au moins doubler le capital initial.

EXERCICE 10.11. 1. Pour un placement à intérêts simples aux taux annuel T_a, le taux mensuel proportionnel $T_{\text{m-prop}} = \frac{T_a}{12}$.
On place 1 500 € à intérêts simples pour une période de 80 jours au taux annuel de 3 %.
Calculer l'intérêt perçu au bout de 80 jours si l'on applique un taux proportionnel.

2. Pour un placement à intérêts composés aux taux d'intérêt mensuel t_m, le taux d'intérêt annuel correspondant est le taux annuel équivalent t_a.
De la même façon, à un taux annuel t_a correspond un taux mensuel équivalent t_m.
Le passage de l'un à l'autre s'effectue à l'aide de la formule : $1 + t_a = (1 + t_m)^12$.
On place un capital à intérêts composés.
   (a) Calculer le taux annuel équivalent à un taux mensuel de 0,5 %.
   (b) Calculer le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 10 %.

3. Compléter le tableau suivant pour un taux annuel de 10 % :

	Taux proportionnel	Taux équivalent
Taux semestriel		
Taux trimestriel		
Taux bimensuel		
Taux mensuel		

10.4.2 Annuités

Formulaire

- $v_n = a \times \frac{(1+t)^n - 1}{t}$
- $a = v_n \times \frac{t}{(1+t)^n - 1}$
- $v_0 = a \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$
- $a = v_0 \times \frac{t}{1-(1+t)^{-n}}$

EXERCICE 10.12.
Une personne verse chaque année pendant 5 ans 150 € sur un compte épargne rémunéré à 2,1 % par an. Calculer la valeur acquise au moment du dernier versement.

EXERCICE 10.13.
Compléter le tableau suivant donnant la valeur acquise v_n au moment du dernier versement d'un placement réalisé par une suite d'annuités constantes a, au taux d'intérêts annuel t pendant n années.

a	n	t	v_n
500 €	4 ans	2 %	
1 300 €	9 ans	1 %	
10 000 €	2 ans	3,75 %	

EXERCICE 10.14.
Une personne veut se constituer un capital en effectuant un versement de 50 € au début de chaque mois pendant trois ans au taux annuel de 3,1 % (la capitalisation est mensuelle).

1. Calculer à 0,001 % le taux mensuel équivalent et le nombre de mensualités.
2. (a) Calculer la valeur acquise au début du 6$^{\text{è}}$ mois pour les six premiers versements.
   (b) Calculer la valeur acquise totale au moment du dernier versement.

EXERCICE 10.15.
Quel montant aura-t-on épargné dans un an en versant chaque mois 200 € sur un compte épargne rémunéré à 4 % par an (la capitalisation est mensuelle). On arrondira le taux mensuel équivalent à 0,001 % près.

EXERCICE 10.16.
Pour constituer un capital de 3 000 € en 4 ans, une personne effectue des versements annuels constants au taux annuel de 0,9 %. Calculer le montant de chaque versement.

EXERCICE 10.17.
Compléter le tableau suivant donnant le montant de chaque versement effectué a pendant n années. On note v_n la valeur acquise, t le taux annuel.

a	n	t	v_n
	3 ans	3 %	700 €
	12 ans	3,8 %	8 000 €
	7 ans	2,9 %	25 000 €

EXERCICE 10.18.
Pour obtenir un capital de 30 000 € dans 15 ans avec un taux annuel proposé de 3,4 %, quelle somme arrondie à l'euro près faut-il épargner chaque mois sachant que la capitalisation est mensuelle ? On arrondira le taux mensuel équivalent à 0,001 % près.

EXERCICE 10.19.
Pour rembourser un emprunt, on verse 24 annuités de 1 139,74 €, le premier versement intervenant avant 1 an après la remise des fonds. Le taux annuel du crédit est 8 %. Calculer, à l'euro près, le montant de l'emprunt contracté.

EXERCICE 10.20.
Compléter le tableau suivant donnant le montant d'une dette v_0 remboursée par annuités constantes a en n versements annuels au taux d'intérêt annuel t, le premier versement s'effectuant un an après l'emprunt.

v_0	n	t	a
	2 ans	5 %	198,99 €
	3 ans	6 %	190,18 €
	4 ans	14 %	343,20 €

EXERCICE 10.21.
Une dette est remboursée en 72 mensualités de 200,88 €, le premier versement intervenant 1 mois après la remise des fonds. Le taux annuel de crédit est 15 %.

1. Calculer le taux mensuel proportionnel au taux annuel.
2. Calculer le montant de la dette.

EXERCICE 10.22.
Un emprunt de 15 000 € est remboursé par annuités constantes au taux annuel de 4 % sur une durée de 5 ans. Calculer le montant de l'annuité constante.

EXERCICE 10.23.
Compléter le tableau suivant donnant le montant de l'annuité constante a versée pour rembourser un prêt v_0 en n versements annuels au taux d'intérêt annuel t.

v_0	n	t	a
2 500 €	4 ans	2,8 %	
8 000 €	5 ans	4,3 %	
40 000 €	6 ans	3,6 %	

EXERCICE 10.24.
Un emprunt de 11 000 € est remboursé par mensualités constantes au TEG (taux effectif global prenant en compte le taux global de crédit et en y incluant les frais de dossier, d'assurance et de garantie) mensuel de 0,18 %. Calculer le montant de la mensualité si le remboursement s'effectue en :

1. 6 mois
2. 1 an
3. 5 ans

EXERCICE 10.25.
Un emprunt de 9 000 € est remboursé sur 3 ans par mensualités constantes au taux annuel de 2,4 %.

1. Calculer le nombre de mensualités de remboursement et le taux d'intérêt mensuel proportionnel.
2. Calculer le montant de la mensualité constante.

EXERCICE 10.26.
Une personne effectue un placement sur n mois avec un prélèvement automatique d'une somme de 150 euros par mois afin de se constituer un capital de 5 000 euros.
Le taux d'intérêt mensuel fixe est de 0,2 % et la capitalisation est mensuelle.
On souhaite déterminer le nombre de mois n nécessaires à l'aide l'algorithme suivant :

```
ENTREE : Saisir a et t
INSTRUCTIONS :
 n prend la valeur 0
 Tant que V < 5 000
  n prend la valeur n+1
  V prend la valeur a*((1+t)^n-1)/t
 Fin Tant quel
SORTIE : Afficher n
```

1. Que représentent les variables t et V?
2. Quel est le test d'arrêt de la boucle de cet algorithme? Quand sort-on de la boucle?
3. Que doit-on saisir pour répondre à la question posée?
4. Programmer cet algorithme sur la calculatrice et le faire fonctionner.