Devoir maison n°3

Suites auxiliaires

À rendre pour le vendredi 3 novembre.
Le devoir peut être fait à deux mais il est fortement conseillé de vraiment travailler tous les deux sur chacun des exercices, car on pourrait en retrouver un dans le prochain contrôle.

La plupart des suites définies par récurrence ne sont ni arithmétiques ni géométriques aussi est-il bien peu pratique de calculer le terme de rang n ou, plus généralement, bien difficile d'étudier leur comportement.

Certaines d'entre elles peuvent être étudées à l'aide d'une suite auxiliaire [1] qui peut avoir la bonne idée d'être géométrique ou arithmétique.

Deux exemples sont fournis dans les deux exercices ci-dessous.

EXERCICE 3.1.
Soit la suite (u_n) définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. (a) Déterminer u_1, u_2 et u_3.
   (b) La suite (u_n) est arithmétique ? Géométrique ? *On justifiera.*
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et on définit la suite (v_n) par, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$.
   (a) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) En déduire une expression de v_n en fonction de n.
   (d) En déduire une expression de u_n, en fonction de n.
   Déterminer alors u_{5000}.

EXERCICE 3.2.
Didier a le projet de partir 6 mois en voyage à la recherche de bons *spots* de surf. Pour cela, il souhaite acquérir un *van* et l'aménager. Il estime le coût final de son véhicule à 15 000 €.
Le 1er janvier 2016, il dépose 6 000 € sur un compte-épargne à intérêts composés rémunéré à 2,5 % par an. Il décide de plus de s'astreindre à déposer chaque 1er janvier des années suivantes 800 € sur ce compte.
Il se demande quand il pourra partir.
Pour répondre à cette question, on pose u_n la somme disponible sur son compte le 1er janvier de l'année $2016 + n$.
Les résultats seront, au besoin, arrondis au centime d'euro.

1. (a) Déterminer u_1, u_2 et u_3.
   (b) La suite (u_n) est arithmétique ? Géométrique ? *On justifiera.*
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = 1,025u_n + 800$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n + 32\,000$.
   (a) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) En déduire une expression de v_n en fonction de n.
   (d) En déduire une expression de u_n, en fonction de n.
   (e) Déterminer à quelle date Didier pourra partir.

1. Une telle suite n'existe pas toujours.