Chapitre 8

Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 3

Sommaire

8.1 Quelques rappels dans le cas général

On a déjà vu les définitions et propriétés suivantes lors du chapitre 6.

Définition. Soit f une fonction, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Si la courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse α une tangente, on appelle *nombre dérivé de f en α* le coefficient directeur de cette tangente.
On le note $f'(\alpha)$.

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dont la courbe admet des tangentes en tout point d'abscisse x, x étant un nombre de l'intervalle I.
On dit alors que f est *dérivable sur I* et on appelle *fonction dérivée de f sur I* la fonction qui à tout nombre x de I associe le nombre dérivé de f en I, c'est-à-dire le coefficient directeur de la tangente en x.
On la note $f'(x)$.

Propriété. *Soit f une fonction définie et dérivable sur I.*

- *Si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I ;*
- *Si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.*

8.2 Cas des fonctions polynômes de degré 3

Définition 8.1. Une fonction polynôme de degré 3 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels avec a non nul.

Propriété 8.1. *Soit f une fonction polynôme de degré 3 définie sur $\mathbb{R}$.*
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Étudier les variations d'une fonction polynôme de degré 3 revient alors à étudier le signe de sa dérivée.

8.3 Exercices

EXERCICE 8.1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x.

1. $f : x \longmapsto 2x^3 + x^2 - 4x + 7$
2. $f : x \longmapsto x^3 - 5x^2 + 1$
3. $f : x \longmapsto -5x^3 + 2x + 3$
4. $f : x \longmapsto 7x^3 - 5$

EXERCICE 8.2.
Dans chacun des cas suivants :

(a) Déterminer la fonction dérivée

(b) Étudier le signe de la fonction dérivée

(c) En déduire le tableau des variations de la fonction

(d) Vérifier ses résultats en traçant la courbe de la fonction sur la calculatrice

1. $f : x \longmapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$
2. $f : x \longmapsto -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$
3. $f : x \longmapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 9$
4. $f : x \longmapsto -2x^3 + 6x - 2$

EXERCICE 8.3.
Une entreprise fabrique et vend une quantité x d'objets, $x \in [1\,;21]$. Le bénéfice pour x objets vendus, exprimés en euros, est donné par $B : x \longmapsto -2x^3 + 54x^2 - 270x - 80$.

1. Déterminer la fonction dérivée $B'(x)$ de B sur l'intervalle $[1\,;21]$.
2. Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[1\,;21]$. En déduire les variations de la fonction B sur $[1\,;21]$.
3. Pour quel nombre d'objets vendus le bénéfice est-il maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

EXERCICE 8.4.
Une entreprise produit des crayons de couleurs en quantité journalière q, exprimée en milliers. La quantité q est comprise entre 1 et 10. Le bénéfice journalier, exprimé en euros, est donné par :

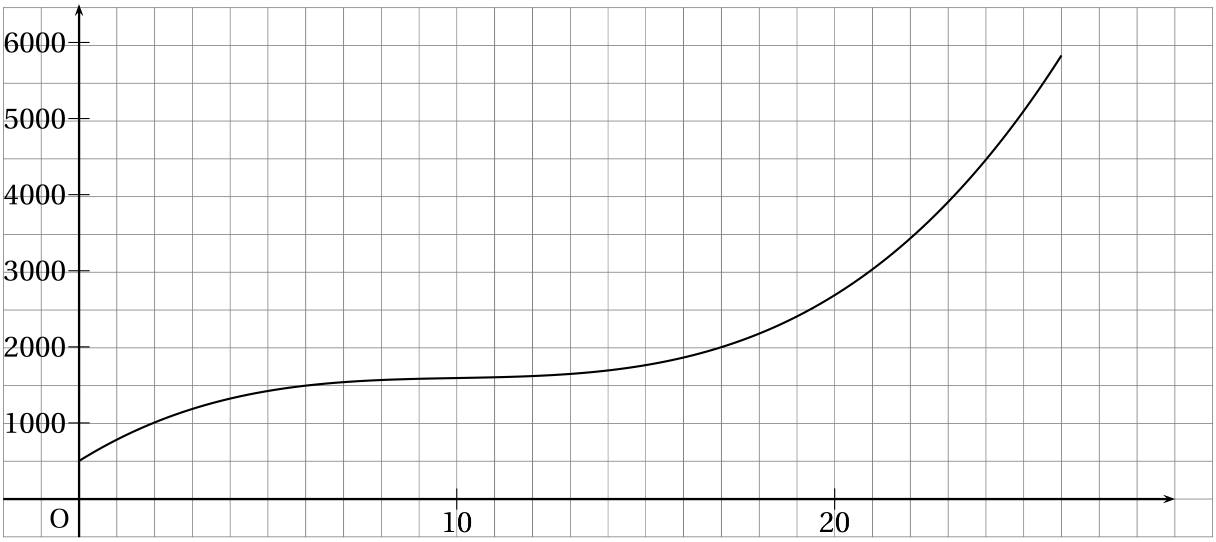
$$B(q) = -q^3 + 147q - 600$$

1. Calculer $B'(q)$ où B' désigne la dérivée de la fonction B.
2. Justifier que le signe du polynôme $B'(q)$ sur $\mathbb{R}$ est donné par le tableau de signe ci-dessous :

q	$-\infty$		-7		7		$+\infty$
$B'(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. En déduire le signe de $B'(q)$ sur $[1\,;10]$, puis dresser le tableau des variations de la fonction B sur $[1\,;10]$.
4. Déterminer le nombre de milliers de crayons à produire et vendre quotidiennement pour obtenir le bénéficie maximal.
   Quel est alors ce bénéfice maximal ?

EXERCICE 8.5.
Un artisan fabrique des bottes sur mesure. Toute paire de bottes est donc commandée, fabriquée et vendue. La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente la fonction c qui, à chaque nombre x de paires de bottes fabriquée, associe le coût de fabrication (en euros) de ces x paires de bottes.



Partie A. Lectures graphiques

1. Quel est le coût de fabrication de 6 paires de bottes ?
2. Combien de paires de bottes sont fabriquées pour un coût de 4 500 € ?
3. Chaque paire de bottes est vendue 201 €. R est la fonction telle que :
$$R(x) = 201x$$
Que représente le nombre $R(x)$?
4. (a) Tracer la représentation graphique de R sur le même repère.
(b) Déterminer graphiquement le nombre de paires de bottes que l'artisan doit fabriquer et vendre pour être bénéficiaire.

Partie B. Étude de la fonction c.
On sait maintenant que, pour x appartenant à $[0\,;26]$:
$$c(x) = x^3 - 30x^2 + 309x + 500$$

1. Calculer la dérivée c' de la fonction c.
Déterminer le signe de $c'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;26]$.
2. En déduire le tableau des variations de la fonction c sur l'intervalle $[0\,;26]$.

Partie C. Étude du bénéfice.

1. Montrer que le bénéfice obtenu pour la fabrication et la vente de x paries de bottes est donné par :
$$b(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 500$$
2. Calculer la dérivée b' de la fonction b.
3. Étudier le signe de $b'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction b sur l'intervalle $[0\,;26]$.
4. Combien de paires de bottes faut-il fabriquer et vendre pour obtenir le bénéfice maximal ?
Quelle est la valeur de ce bénéfice maximal ?