Correction du DS commun de 2nde mai 2017

Exercice n°1 :

1) Voici le tableau de variations de la fonction d :

x	0	6	12	18	24
Variations de d	50 ↘	-20 ↗	60 ↘	-35 ↗	65

2) Voici le tableau de signes de la fonction d :

x	0		4		8		15,5		21		24
signe de d		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

3) Le minimum de la fonction d sur l'intervalle [0 ;12] est -20. Ce minimum est obtenu à 6h.

4) Les petits canaux de la ville ne sont plus navigables sur l'intervalle]16,5 ;20[.

5) a) L'ensemble des solutions de l'inéquation $d(t) > 50$ est]11 ;13,5[$\cup$]23 ;24].

b) Cela signifie qu'entre 11h et 13h30 ainsi qu'entre 23h et minuit, la place San Marco est inondée.

Exercice n°2 :

1) Voici un arbre traduisant la situation.

2) a) En utilisant l'arbre, on trouve p(E) = $\frac{5}{9}$ et p(F) = $\frac{5}{9}$.

b) $E \cap F$ est l'événement : « la somme des deux pièces tirées est un nombre entier supérieur à 2,50€ ».

D'après l'arbre, $P(E \cap F) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

c) $E \cup F$ est l'événement : « le somme des deux pièces tirées est un nombre entier ou un nombre supérieur ou égal à 2,50€ ».

Or, $p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F)$

$= \frac{5}{9} + \frac{5}{9} - \frac{3}{9}$

donc $p(E \cup F) = \frac{7}{9}$.

d) $\overline{E}$ est l'événement : « la somme des deux pièces tirées n'est pas un nombre entier ».

$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$.

Exercice n°3 :

1) L'entreprise produit 30 tonnes de papier par heure.

a) $C(30) = 30^2 + 632 \times 30 + 1075 = 20935$.
Le coût de production des 30 tonnes de papier est de 20 935 euros.

b) $700 \times 30 = 21000$.
Le montant de la vente des 30 tonnes de papier est de 21 000 euros.

c) $21000 - 20935 = 65$.
Le bénéfice réalisé par l'entreprise pour une production et une vente de 30 tonnes de papier est donc de 65 euros.

2) Soit x la quantité de papier (en tonnes) produite et vendue par heure par l'entreprise. Pour tout $x \in [0;60]$, on a :

a) $R(x) = 700x$.

b) $B(x) = R(x) - C(x)$

$= 700x - (x^2 + 632x + 1075)$

$= 700x - x^2 - 632x - 1075$

$= -x^2 + 68x - 1075$.

c) $-(x-34)^2 + 81 = -(x^2 - 68x + 1156) + 81$

$= -x^2 + 68x - 1156 + 81$

$= -x^2 + 68x - 1075 = B(x)$.

Donc $B(x)$ est bien égal à $-(x-34)^2 + 81$.

d) $(43-x)(x-25) = 43x - 1075 - x^2 + 25x$

$$= -x^2 + 68x - 1075 = B(x).$$

Donc $B(x)$ est bien égal à $(43-x)(x-25)$.

3) $43 - x > 0 \Leftrightarrow x < 43$

$x - 25 > 0 \Leftrightarrow x > 25$

On obtient donc le tableau de signes ci-dessous :

x	0		25		43		60
$x-25$		-	0	+		+	
$43-x$		+		+	0	-	
$B(x)$		-	0	+	0	-	

4) B est une fonction polynôme du second degré donnée sous forme canonique à la question 2)b), avec $a=-1$, $\alpha = 34$ et $\beta = 81$ donc la courbe représentative de B est une parabole tournée vers le bas car $a<0$, de sommet S(34 ; 81).

D'où le tableau de variations :

x	0		34		60
B	-1075	$\nearrow$	81	$\searrow$	-595

5) a) Le bénéfice correspondant à l'arrêt de la production est $B(0) = -0^2 + 68 \times 0 - 1075$ soit une perte de 1075 euros.

b) Pour cette question, on utilise le tableau de signes de $B(x)$ déterminé à la question 3). Pour réaliser un bénéfice positif, l'entreprise doit produire et vendre entre 25 et 43 tonnes de papier par heure.

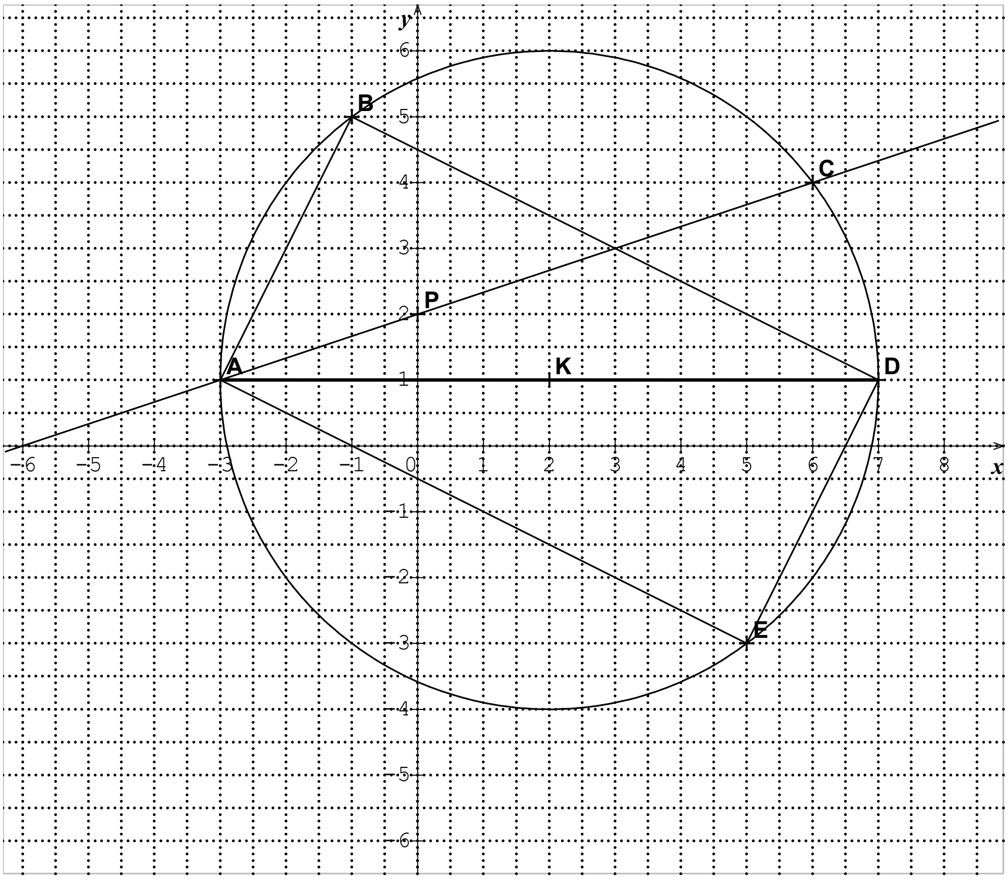
c) Pour cette question, on utilise le tableau de variations de B déterminé à la question 4). Pour réaliser un bénéfice maximum, l'entreprise doit produire et vendre 34 tonnes de papier par heure.

6) Voici un algorithme calculant le montant de la prime versée à chaque salarié :

Variables : B : bénéfice mensuel, M : montant de la prime
Début
Initialisation : Entrer B
Traitement : Si $B > 40000$
Alors M prend la valeur $200 + \frac{0,1}{100}(B - 40000)$
Sinon
Si $B < 0$
Alors M prend la valeur 0
Sinon M prend la valeur $\frac{0,5}{100} \times B$
Fin du si
Fin du si
Sortie : Afficher M
Fin

Exercice n°4 :

1)



2) Soit C le cercle de centre K passant par le point B.
C a pour rayon KB = 5 d'après l'énoncé.

KA = $\sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2}$

= $\sqrt{(-3-2)^2 + (1-1)^2}$

= $\sqrt{5^2 + 0^2}$

= $\sqrt{25} = 5$ donc le point A appartient au cercle C.

3) a) Le milieu du segment [AD] a pour coordonnées ($\frac{x_A + x_D}{2}$; $\frac{y_A + y_D}{2}$) c'est-à-dire ($\frac{-3+7}{2}$; $\frac{1+1}{2}$), c'est-à-dire (2 ;1) qui sont les coordonnées de K.

K est donc le milieu du segment [AD].

b) D'après la question précédente, KA=KD. Or KA=KB=KC d'après la question 2) et l'énoncé donc les points A, B et D sont sur le cercle C dont un diamètre est [AD].

Par conséquent le triangle ABD est rectangle en B.

4) a) $\overrightarrow{AB}$ ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$) donc $\overrightarrow{AB}$ (-1-(-3) ;5-1) donc $\overrightarrow{AB}$ (2 ;4).

b) ABDE est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{DE}$ = $\overrightarrow{BA}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 7 = -2 \\ y_E - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 5 \\ y_E = -3 \end{cases}$$

donc E(5 ;-3).

c) ABDE est un parallélogramme qui a un angle droit (*on a vu à la question 3)b) que le triangle ABD est rectangle en B*) donc ABDE est un rectangle.

5) $\overrightarrow{PA}$ (-3-0 ;1-2) donc $\overrightarrow{PA}$ (-3 ;-1).

$\overrightarrow{PC}$ (6-0 ;4-2) donc $\overrightarrow{PC}$ (6 ;2).

D'une part, $x_{\overrightarrow{PA}} \times y_{\overrightarrow{PC}}$ = -3×2 = -6.

D'autre part, $x_{\overrightarrow{PC}} \times y_{\overrightarrow{PA}}$ = 6×-1 = -6.

Le critère de colinéarité est vérifié, $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PC}$ sont donc colinéaires ; par conséquent les points P, A et C sont alignés.

Exercice n°5 :

Notons x la longueur, en m, du côté du bassin carré.
Alors le jardin est un carré de côté $x+6$.
Sachant que l'aire de la pelouse est 90m² et que l'aire du jardin est égale à la somme de l'aire de la pelouse et de l'aire du bassin, on a :

$$(x+6)^2 = 90 + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 = 90 + x^2$$
$$\Leftrightarrow 12x = 54$$
$$\Leftrightarrow x = 4{,}5$$

L'aire du bassin vaut donc 4,5² c'est-à-dire 20,25m².

D'autres méthodes peuvent être utilisées ; par exemple :

On note toujours x le côté du carré central (le bassin).
On remarque que l'aire de la pelouse est la somme des aires de quatre rectangles :
a) deux rectangles de longueur (x+6) et de largeur 3 mètres;
b) deux rectangles de longueur x et de largeur 3 mètres.
Par conséquent, l'aire de la pelouse (en m²) en fonction de x vaut :

$$S(x) = 2 \times 3 \times (x+6) + 2 \times 3 \times x = 12x + 36$$

L'aire de la pelouse vaut 90 m² si et seulement si $12x + 36 = 90$ soit $x = 4{,}5$.