Chapitre 7

Probabilités

Sommaire

7.1 Activités

Pour cette section, on dispose d'une urne contenant quatre boules insdiscernables au toucher dont trois boules bleues portant respectivement les numéros 1, 2 et 3, notées b_1, b_2 et b_3, et une boule rouge unique, notée r.

7.1.1 Arbre pondéré

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On prélève de façon équiprobable une boule dans l'urne puis on la remet dans l'urne et on en prélève une seconde, toujours de façon équiprobable. On note, dans l'ordre, les couleurs des boules extraites ».
On note Ω l'ensemble de toutes issues possibles et $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

1. Construire l'arbre des possibles et en déduire Ω. Est-on dans une situation qu'équiprobabilité ?
2. (a) Construire un arbre, que nous appelerons « modèle intermédiaire », qui prenne en compte, pour chaque boule extraite, non seulement sa couleur mais aussi son numéro.
   (b) A-t-on équiprobabilité entre chacun des chemins ?

(c) En déduire les probabilités de chacun des évènements élémentaires de Ω.
O*n présentera les résultats sous forme de tableau du type :*

ω_i	ω_1	ω_2	$\dots$
$p(\omega_i)$	$p(\omega_1)$	$p(\omega_2)$	$\dots$

Remarque. Lorsqu'on détermine pour chaque évènement élémentaire sa probabilité, on dit qu'on décrit la loi de probabilité.

3. L'arbre du modèle intermédiaire, nous ramenant à une situation d'équiprobabilité, nous a permis de décrire la loi de probabilité. Cependant il est un peu lourd. Essayons de l'alléger.
   (a) Refaire l'arbre des possibles en ajoutant devant chaque éventualité des branches multiples : autant qu'on en peut trouver sur le modèle intermédiaire qui mènent à cette éventualité.
   (b) Refaire l'arbre des possibles de la manière suivante :
      i. Remplacer ces branches multiples par des branches simples mais en indiquant le nombre de branches qu'il devrait y avoir. On obtient alors un arbre pondéré (chaque branche ayant un poids).
      ii. Combien de chemins du modèle intermédiaire terminaient sur l'évènement élémentaire (b, b) ? Comment pourrait-on retrouver ce nombre à partir de l'arbre précédent ?
   (c) Refaire l'arbre des possibles de la manière suivante :
      i. Pondérer chaque branche, non plus avec le nombre de branches multiples qu'il devrait y avoir, mais avec le quotient de ce nombre par le nombre total de branches qu'il devrait y avoir à ce même niveau.
      ii. Quelle est la probabilité de l'évènement élémentaire (b, b) ? Comment pourrait-on retrouver cette probabilité à partir de l'arbre précédent ?

7.1.2 Schéma de BERNOULLI

Rappel : on considère toujours la même urne contenant 3 boules bleues et une boule rouge.

Première expérience aléatoire : « On prélève de façon équiprobable et avec remise, deux fois de suite une boule dans l'urne. On note le nombre de fois qu'on a obtenu la couleur bleue ».

Seconde expérience aléatoire : « On prélève de façon équiprobable et avec remise, trois fois de suite une boule dans l'urne. On note le nombre de fois qu'on a obtenu la couleur bleue ».

Pour chacune de ces expériences aléatoires :

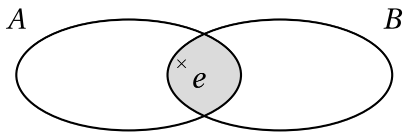
1. Construire l'arbre pondéré correspondant.
2. Décrire la loi de probabilité correspondante.

7.2 Probabilités : rappels de Seconde

Ce paragraphe ne comportant que des rappels de Seconde, les exemples seront limités et les preuves des théorèmes et propriétés ne seront pas refaites.

7.2.1 Vocabulaire des ensembles

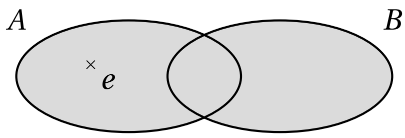
Définition 7.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

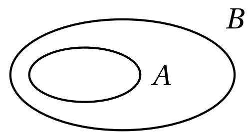
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 7.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 7.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note alors $A \subset B$ (« A inclus dans B ») ou $B \supset A$ (« B contient A »).

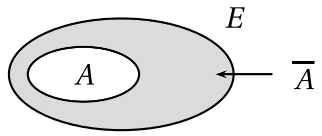


On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

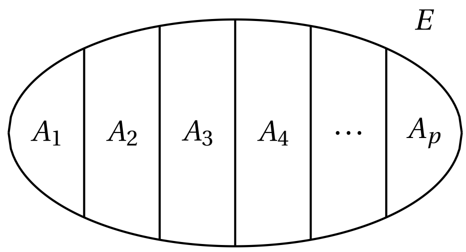
Définition 7.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 7.5. Des parties $A_1, A_2, \ldots, A_p$ d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.
Ainsi :

- Pour tous i et j de $\{1 ; \ldots ; p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\coprod_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E$.



Propriété 7.1. *Soit A une partie d'un ensemble E et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors A et $\overline{A}$ constituent une partition de E.*

Définition 7.6 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de E*. Ce nombre est noté Card(E). On convient que Card$(\varnothing)= 0$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

7.2.2 Expériences aléatoires

Issues, univers

Définition 7.7. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

Dans ce chapitre, Ω sera toujours un ensemble fini.

Évènements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2\,;3\,;\cdots\,;11\,;12\}$.
Le tableau 7.1 de la présente page définit le vocabulaire relatif aux *évènements* (en probabilité).

TABLE 7.1: Vocabulaire relatif aux évènements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Évènement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2\,;4\,;6\,;8\,;10\,;12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3\,;6\,;9\,;12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10\,;11\,;12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$
Évènement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Évènement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un évènement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un évènement impossible.
Évènement certain (noté Ω)	C'est un évènement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un évènement certain.
Évènement « A et B » (noté $A \cap B$)	Évènement constitué des issues communes aux 2 évènements	$A \cap B = \{6\,;12\}$
Évènement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Évènement constitué de toutes les issues des deux évènements	$A \cup B = \{2\,;3\,;4\,;6\,;8\,;9\,;10\,;12\}$
Évènements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des évènements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Évènements contraires (l'évènement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux évènements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'évènement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

7.2.3 Probabilités

Loi de probabilité sur un univers Ω

Définition 7.8. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0;1]$, appelés *probabilités*, tels que :

- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des évènements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Propriété 7.2. *Soit A et B deux évènements de Ω, alors :*

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Remarque. Comme, par définition, la probabilité de l'évènement certain est 1 alors la probabilité de l'évènement impossible, qui est son contraire, est 0.

Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

Définition 7.9. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un évènement A est la suivante :

Propriété 7.3. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout évènement élémentaire ω et tout évènement A on a :*

$$p(\omega) = \frac{1}{Card(\Omega)} \qquad p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même, comme par exemple dans l'activité 7.1.1.

7.3 Loi binomiale

7.3.1 Schéma de Bernoulli

Définition 7.10 (Schéma de Bernoulli)**.** Soit E une expérience aléatoire ayant exactement deux issues possibles, qu'on appelle généralement, pour l'une, *succès*, notée S, et, pour l'autre, *échec*, notée $\overline{S}$, et telle que $p(S) = p$ et donc $p(\overline{S}) = 1 - p$.
Répéter n fois cette expérience E de façon indépendante, c'est constituer ce qu'on appelle un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.

7.3.2 Loi binomiale

Définition 7.11 (Loi binomiale)**.** Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
Si on s'intéresse au nombre X de succès S de chaque issue, on dit que X est une variable aléatoire qui suit une *loi binomiale de paramètres n et p*, généralement notée $\mathscr{B}(n;p)$.

Propriété 7.4. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.*
Alors, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$:

- $p(X \leqslant k) = 1 - p(X > k)$;
- $p(X \geqslant k) = 1 - p(X < k)$.

7.3.3 Espérance

Propriété 7.5. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$. Alors, si l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience, la moyenne du nombre de succès tend vers un nombre appelé espérance mathématique de la loi binomiale et l'on note $E(x)$ et qui vaut $E(X) = np$.*

On l'admettra.

7.3.4 Utilisation de la calculatrice

Les calculatrices permettent d'obtenir les valeurs exactes de $\binom{n}{k}$ et, dans le cas où la variable aléatoire suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$, les valeurs approchées de $p(X=k)$ et de $p(X \leqslant k)$.

Pour l'exemple nous supposerons que la loi binomiale est de paramètres $n=10$ et $p=0,25$ et que $k=2$.

	Casio anciens modèles	Casio modèles récents	TI
$p(X=2)$	Menu STAT DIST BINM Bpd Data : var x : 2 Numtrial : 10 p : 0,25 *Inutilisable dans les calculs (noter le résultat pour réutilisation)*	Menu RUN (OPTN STAT DIST BINM Bpd pour) BinomialPD(2, 10, 0.25)	DISTR binomFdp(10,0.25,2)
$p(X \leqslant 2)$	Menu STAT DIST BINM Bcd Data : var x : 2 Numtrial : 10 p : 0,25 *Inutilisable dans les calculs (noter le résultat pour réutilisation)*	Menu RUN (OPTN STAT DIST BINM Bcd pour) BinomialCD(2, 10, 0.25)	DISTR binomFRép(10,0.25,2)

7.4 Exercices

EXERCICE 7.1.
Les expériences aléatoires suivantes sont-elles des épreuves de BERNOULLI ? Si oui préciser leur paramètre.

1. On lance un dé cubique équilibré et on gagne si on obtient 6.
2. On lance un dé tétraèdrique équilibré et on note le résultat obtenu.
3. Un automobiliste arrive à un feu et a une probabilité de 0,3 que le feu soit vert.
4. On tire une boule dans une urne contenant quatre boules rouges et six boules noires et on note la couleur de la boule obtenue.

EXERCICE 7.2.
On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on appelle « tirage »le résultat obtenu. Ainsi (Face ; Face ; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de « Pile »obtenues.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer $E(X)$, l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 7.3.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant les deux tiers du temps, rouge un quart du temps et orange le reste du temps. On dit que l'automobiliste a obtenu le feu au vert quand il est passé sans s'arrêter.
On s'intéresse uniquement au nombre de fois où l'automobiliste est passé sans s'arrêter.

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait les trois feux verts ? deux des trois feux verts ?
3. Combien de feux au vert l'automobiliste peut-il espérer ?

EXERCICE 7.4.
Une association comprenant 30 adhérents organise chaque année une assemblée générale. Les statistiques montrent que chaque adhérent assiste à l'assemblée avec la probabilité de 80 %. Les décisions prises par l'assemblée n'ont de valeur légale que lorsque plus de la moitié des adhérents assiste à l'assemblée.
Quelle est la probabilité que, lors de la prochaine assemblée, le quorum soit atteint ?

EXERCICE 7.5.
À chaque tir, un archer atteint sa cible avec une probabilité égale à 0,7.
Combien de tirs doit-il effectuer pour que, avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99, il atteigne la cible au moins deux fois ? Au moins trois fois ?

EXERCICE 7.6.
On lance une pièce équilibrée n fois. On s'intéresse à la probabilité d'obtenir « face » dans 60 % des cas ou plus.
Envisager les cas $n = 10$, puis $n = 100$, puis $n = 1000$.
Donner d'abord, sans calcul, une estimation spontanée du résultat, puis solliciter la calculatrice ($n = 10$) ou un algorithme de calcul $n = 100$ et $n = 1000$).

EXERCICE 7.7.
Un QCM comporte 20 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste. Chaque réponse rapporte un point et il n'y a pas de pénalité pour une réponse fausse.
Un candidat répond au hasard à chaque question.
Quel nombre total de points peut-il espérer ?
Quelle pénalité doit-on attribuer à une réponse fausse pour que le total espéré, en répondant entièrement au hasard, soit égal à 2 sur 20 ?

EXERCICE 7.8.
Un texte contient n erreurs. Lors d'une relecture, on considère que chaque erreur a 80 % de chances d'être corrigée.
Peut-on prévoir, en moyenne, le nombre d'erreurs restantes après une relecture, ..., après k relectures, k étant un entier supérieur à 1 ?

EXERCICE 7.9 (Simulation sur ordinateur)**.**
Cet exercice nécessite un tableur.
On se propose d'utiliser le tableur pour résoudre le problème suivant :
« Monsieur X est invité chez des nouveaux amis qu'il sait très joueurs mais qu'il connait à peine. Au cours de la conversation il apprend que ses nouveaux amis ont deux enfants mais il oublie de demander leur sexe. Soudain l'un de ces deux enfants entre dans la salle. Il s'agit d'un garçon.
"– Vous avez donc un garçon et ... ? demande-t-il
– Je parie que tu ne devineras pas. Sur quoi mises-tu ? un gars ? une fille ?"
Sur quoi doit miser monsieur X pour maximiser ses chances de clore le bec à ces amis un peu lourds avant de prendre congé ? »

On suppose pour simplifier les choses qu'un enfant sur deux qui nait est une fille et l'autre un garçon.

1. Que *conjecturez-vous* a priori quant au sexe de l'autre enfant ?
2. On se propose d'utiliser la colonne A pour simuler le sexe du premier enfant, la colonne B pour celui du second enfant et la colonne C pour compter le nombre de garçons.
   Proposer une formule utilisant la fonction ALEA (ou ALEA.ENTRE.BORNES avec Calc) permettant de simuler le sexe d'un enfant dans les cases A1 et B1 et une formule adaptée pour compter le nombre de garçons de la fratrie dans la case C1.
   Demander au professeur de valider les deux formules avant d'aller plus loin.
3. « Tirer la poignée » verticalement de façon à simuler 100 familles de deux enfants.
4. Dans la plage F4 : J5 dresser un tableau de la forme suivante :

Nombre de garçons	0	1	2	total
Effectif				

   où les cases *Effectif* seront automatiquement complétées par le tableur (utiliser la fonction NB.SI)
5. En appuyant plusieurs fois sur la touche F9 (Excel) ou CTRL+MAJ+F9 (Calc), indiquer autour de quels effectifs semblent osciller les types de famille.
6. Puisque l'un des enfants est un garçon, quel type de famille doit-on exclure ?
   En observant les types de famille restants, déterminer sur quel sexe doit miser Monsieur X et dans quelle proportion il a des chances de gagner son pari.
   Votre conjecture est-elle validée ?