Devoir maison n°4 : un corrigé

Le plan est muni d'un repère orthornormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
Les points A, B et C sont de coordonnées respectives $(8;2)$, $(4;-2)$ et $(0;2)$.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et passant par B.
P est le point de coordonnées $(p;0)$ où p est un réel quelconque et on appelle $\mathscr{D}_p$ la droite (CP).

Partie A : Questions préliminaires

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow AM^2=AB^2 \Leftrightarrow (x-8)^2+(y-2)^2=(4-8)^2+(-2-2)^2 \Leftrightarrow (x-8)^2+(y-2)^2=32$
Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est donc $(x-8)^2+(y-2)^2=32$.

2. Déterminer l'ensemble des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec :
   (a) l'axe des abscisses ;

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathscr{C}\cap(Ox) &\Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ (x-8)^2+(y-2)^2=32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ (x-8)^2+(-2)^2=32\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ (x-8)^2=28\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ x=8+\sqrt{28} \text{ ou } x=8-\sqrt{28}\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{C}\cap(Ox)=\{(8+\sqrt{28};0);(8-\sqrt{28})\}$.

   (b) l'axe des ordonnées.

$$M(x;y)\in\mathscr{C}\cap(Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ (x-8)^2+(y-2)^2=32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ (-8)^2+(y-2)^2=32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ (y-2)^2=-32\end{cases}$$

Comme il est impossible qu'un carré soit négatif, alors $\mathscr{C}\cap(Oy)=\varnothing$.

Partie B : Deux cas particuliers

1. On pose $p=-6$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_{-6}$.

$\overrightarrow{CP}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_{-6}$ donc :

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathscr{D}_{-6} &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}=\begin{pmatrix}x\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix} \text{ colinéaires}\\ &\Leftrightarrow X'Y-Y'X=0 \Leftrightarrow -6(y-2)+2x=0 \Leftrightarrow 2x-6y+12=0 \Leftrightarrow x-3y+6=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_{-6}$ est donc $x-3y+6=0$.

   (b) Déterminer l'ensemble des intersections de $\mathscr{D}_{-6}$ et de $\mathscr{C}$.

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathscr{D}_{-6}\cap\mathscr{C} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+6=0\\ (x-8)^2+(y-2)^2=32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-6\\ (3y-6-8)^2+(y-2)^2=32\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-6\\ 10y^2-88y+168=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-6\\ y=2{,}8 \text{ ou } y=6\end{cases}\\ &\Leftrightarrow (x;y)=(2{,}4;2{,}8) \text{ ou } (x;y)=(12;6)\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{D}_{-6}\cap\mathscr{C}=\{(2{,}4;2{,}8);(12;6)\}$.

2. Mêmes questions avec $p=1$.

(a) Cherchons d'abord une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_1$.
$\overrightarrow{CP}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ donc :

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathscr{D}_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}=\begin{pmatrix}x\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix} \text{ colinéaires}\\ &\Leftrightarrow X'Y-Y'X=0 \Leftrightarrow y-2+2x=0 \Leftrightarrow 2x+y-2=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$ est donc $2x+y-2=0$.

(b) Cherchons ensuite si la droite $\mathscr{D}_1$ et le cercle $\mathscr{C}$ ont des points d'intersection.

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathscr{D}_1\cap\mathscr{C} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-2=0\\ (x-8)^2+(y-2)^2=32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2\\ (x-8)^2+(-2x+2-2)^2=32\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2\\ (x-8)^2+(-2x)^2=32\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+2\\ 5x^2-16x+32=0\end{cases}\end{aligned}$$

Or le calcul du discriminant pour le trinôme de la ligne 2 donne $\Delta=-384$ ce qui signifie que ce trinôme n'a pas de racine donc que le système n'a pas de solution. Donc $\mathscr{D}_1\cap\mathscr{C}=\varnothing$.

Partie C : Cas général
Déterminer, par le calcul, le nombre d'intersections entre $\mathscr{D}_p$ et de $\mathscr{C}$ selon les valeurs de p.

Cherchons d'abord une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_p$.
$\overrightarrow{CP}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_p$ donc :

$$\begin{aligned} M(x\,;\,y) \in \mathscr{D}_p \quad & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\ & \Leftrightarrow \quad X'Y - Y'X = 0 \Leftrightarrow p(y-2) + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x + py - 2p = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_p$ est donc $2x + py - 2p = 0$.
Cherchons ensuite si la droite $\mathscr{D}_p$ et le cercle $\mathscr{C}$ ont des points d'intersection.

$$M(x\,;\,y) \in \mathscr{D}_p \cap \mathscr{C} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + py - 2p = 0 \\ (x-8)^2 + (y-2)^2 = 32 \end{cases}$$

On a ici le choix entre isoler x ou isoler y dans la première ligne pour ensuite le subsituer dans la seconde.

En isolant x : La ligne 1 est équivalente à $x = -\frac{p}{2}y + p$. En subsituant cette valeur dans la seconde ligne (L_2), celle-ci devient :

$$\begin{aligned} L_2 \quad & \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{p}{2}y + p - 8\right)^2 + (y-2)^2 = 32 \Leftrightarrow \frac{p^2}{4}y^2 - 2\frac{p}{2}y(p-8) + (p-8)^2 + y^2 - 4y + 4 - 32 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \left(\frac{p^2}{4} + 1\right)y^2 - (p(p-8)+4)y + (p-8)^2 - 28 = 0 \end{aligned}$$

C'est un trinôme en y.

$$\begin{aligned} \Delta &= [p(p-8)+4]^2 - 4 \times \left(\frac{p^2}{4} + 1\right) \times [(p-8)^2 - 28] \\ &= p^2(p-8)^2 + 2 \times p(p-8) \times 4 + 16 - (p^2+4)[(p-8)^2 - 28] \\ &= p^2(p-8)^2 + 8p(p-8) + 16 - p^2(p-8)^2 + 28p^2 - 4(p-8)^2 + 112 \\ &= 8p^2 - 64p + 16 + 28p^2 - 4(p^2 - 16p + 64) + 112 \\ &= 32p^2 - 128 \end{aligned}$$

Ouf!
On remarque que Δ est un trinôme en p qui est positif sauf entre ses racines. Mais $\Delta = 32(p^2-4) = 32(p+2)(p-2)$ donc ses racines sont 2 et -2. Ainsi :

p	$-\infty$			-2			2			$+\infty$
Signe de Δ			+	0	−		0	+		
Nombre d'intersections			2	1	0		1	2		

En isolant y : Isoler y dans la première ligne nécessite de diviser par p, or cela n'est possible que lorsque $p \neq 0$. On doit donc examiner lorsque $p = 0$, puis lorsque $p \neq 0$.

Quand $p = 0$: La ligne 1 est équivalente à $x = 0$ (la droite $\mathscr{D}_p$ est donc l'axe des ordonnées).
En remplaçant dans la ligne 2 (L_2), celle-ci devient :
$L_2 \Leftrightarrow (-8)^2 + (y-2)^2 = 32 \Leftrightarrow (y-2)^2 = -32$
Cela est impossible, donc, lorsque $p = 0$, il n'y a pas d'intersection entre la droite et le cercle.

Quand $p \neq 0$: La ligne 1 est équivalente à $y = -\frac{2}{p}x + 2$. En subsituant cette valeur dans la ligne 2 (L_2) celle-ci devient :
$L_2 \Leftrightarrow (x-8)^2 + \left(-\frac{2}{p}x + 2 - 2\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 + \frac{4}{p^2}x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{4}{p^2}\right)x^2 - 16x + 32 = 0$
C'est un trinôme en x.
$\Delta = 16^2 - 4 \times \left(1 + \frac{4}{p^2}\right) \times 32 = 128 - \frac{512}{p^2} = \frac{128p^2 - 512}{p^2}$
Le dénominateur étant un carré, il sera toujours positif, donc Δ est du signe du numérateur $128p^2 - 512$ qui est un trinôme en p positif sauf entre ses racines. Mais $128p^2 - 512 = 128(p^2-4) = 128(p+2)(p-2)$ donc ses racines sont -2 et 2.
Ainsi :

p	$-\infty$			-2			0			2			$+\infty$
Signe de Δ			+	0	−		‖		−	0	+		
Nombre d'intersections			2	1	0		‖		0	1	2		

Conclusion : En réunissant les deux cas ($p = 0$ et $p \neq 0$), on obtient donc :

p	$-\infty$			-2			2			$+\infty$
Nombre d'intersections			2	1	0		1	2		