Chapitre 4

Suites, puissances et limites de matrices

Sommaire

4.1 Activité

Reprenons l'exercice 2.15 page 20 du chapitre 2.

Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année :

- un abonnement A donnant droit à six spectacles ;
- un abonnement B donnant droit à trois spectacles.

On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans.
Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.
On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B.
$\forall n \in \mathbb{N}$, on note :

- a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;
- b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.

Préliminaire : Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{S} : \begin{cases} a_{n+1} = 0,85a_n + 0,45b_n \\ b_{n+1} = 0,15a_n + 0,55b_n \end{cases}$

Partie A : Étudions cette situation à l'aide de suites.

Quoique hors sujet dans ce chapitre, consacré aux matrices et non aux suites, la façon de procéder ici, particulièrement dans la question 3, nous permettra une analogie avec une suite de matrices plus tard dans le chapitre.

1. Rappeler le lien entre a_n et b_n.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,4a_n + 0,45$
3. (a) Déterminer le réel c tel que $c = 0,4c + 0,45$.
   (b) Montrer que la suite (c_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $c_n = a_n - c$ est géométrique.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0,75 - 0,15 \times 0,4^n$.
   (d) En déduire vers quelle distribution va tendre le système.

Partie B : Étudions cette situation à l'aide de matrices.

1. Déterminer P_0.
2. Montrer que $\mathscr{S}$ est équivalent à $P_{n+1} = P_n \times M$ où M est une matrice qu'on explicitera, puis en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times M^n$.
3. *Jusqu'ici on utilisait la calculatrice pour exploiter la formule précédente. On se pose maintenant la question d'obtenir M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons voir ci-dessous une manière de procéder. Nous en verrons une autre plus tard dans le chapitre.*
   (a) Montrer que $M = N + 0,4R$ où $N = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$
   (b) Calculer N^2, R^2, $N \times R$ et $R \times N$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = N + 0,4^n R$.
   (d) En déduire les coefficients de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (e) En déduire vers quelle distribution va tendre le système.

4.2 Calculs des puissances de certaines matrices

Dans ce chapitre on va devoir calculer des puissances de matrices qu'on décomposera, lorsque c'est possible, en sommes (comme dans l'activité), ou en produits de matrices, dont on peut calculer facilement les puissances.
Certaines matrices, du fait de la simplicité de calcul de leurs puissances, jouent un rôle plus particulier : les matrices triangulaires et les matrices diagonales.

4.2.1 Matrices triangulaires

Définition 4.1. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.
A est dite *triangulaire supérieure* d'ordre n (respectivement *inférieure*) si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \text{(respectivement } i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$$

A est dite *strictement* triangulaire supérieure d'ordre n (respectivement inférieure) si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, i \geqslant j \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \text{(resp. } i \leqslant j \Rightarrow a_{ij} = 0)$$

Propriété 4.1. *Les puissances d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) sont triangulaires supérieures (resp. inférieures).*
Les puissances d'une matrice strictement triangulaire d'ordre n sont nulles à partir de l'exposant n.

On l'admettra.

Exemple 4.1. Soit M une matrice triangulaire strictement supérieure d'ordre 3.
On peut écrire $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^2 et M^3.

4.2.2 Matrices diagonales

Définition 4.2. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.
A est dite *diagonale* d'ordre n si :

$$\forall (i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Propriété 4.2. *Soit $D = (d_{ij})$, une matrice diagonale d'ordre n.
Alors, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, D^p est une matrice diagonale d'ordre n dont les éléments diagonaux sont, $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, d_{ii}^p.*

On l'admettra pour $n \neq 2$, et, pour les matrices diagonales d'ordre 2, on laisse la démonstration (exigible) au lecteur : on le prouve par récurrence sur p.

4.2.3 Matrices diagonalisables

Définition 4.3. Une matrice carrée M d'ordre n est dite *diagonalisable* s'il existe une matrice diagonale D d'ordre n et une matrice carrée P d'ordre n inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

Propriété 4.3. *Soit M une matrice diagonalisable c'est-à-dire telle que $M = PDP^{-1}$ où D est diagonale. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = PD^nP^{-1}$.*

La démonstration est à refaire dans chaque exercice. On le prouve par récurrence sur n.

Exemple 4.2. Soit $M = \begin{pmatrix} 6{,}25 & -9 \\ 4{,}5 & -6{,}5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $M = PDP^{-1}$.
3. Montrer, par récurrence sur n, que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire les coefficients de M^n, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode pour diagonaliser une matrice 2×2

La question se pose alors de déterminer, au moins pour les matrices carrées d'ordre 2 :
- si la matrice est diagonalisable;
- quelles sont les matrices D et P dans ce cas.

On a alors la propriété suivante :

Propriété 4.4. *Soit A une matrice carrée d'ordre 2.*
- *A est diagonalisable si, et seulement si, il existe λ et μ, appelés* valeurs propres *de A, et V et W deux matrices colonnes à coefficients non proportionnels, appelées* vecteurs propres*, tels que $AV = \lambda V$ et $AW = \mu W$.*
- *En posant $P = \begin{pmatrix} V & W \end{pmatrix}$, on a $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$.*

On l'admettra.
Dans la pratique, on procède de la manière décrite ci-dessous.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Cherchons $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $AV = \lambda V$.
$AV = \lambda V \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$.
On a $B = A - \lambda I_2$.
Si B est inversible, alors $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc la matrice colonne V est alors proportionnelle à toute matrice colonne W car $V = 0 \times W$.
Pour que A soit diagonalisable, il faut donc que B ne soit pas inversible, donc que son déterminant soit nul.
$\det B = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$.
En partant de $AW = \mu W$, on obtient aussi A diagonalisable $\Leftrightarrow \mu^2 - (a+d)\mu + ad - bc = 0$.
Finalement, A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ le polynôme $x^2 - (a+d)x + ad - bc$ admet des racines réelles (éventuellement non distinctes) et ces racines sont les valeurs propres de la matrice A. Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de A.
Reste alors à trouver V et W.
Il faudra, au cas par cas, résoudre le système suscité avec λ puis μ. On notera que, le déterminant de B étant nul, il n'y aura pas de solution unique pour V ou W donc pour P.

Exemple 4.3. Reprenons la matrice M de l'activité d'introduction : $M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,45 \\ 0,15 & 0,55 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de M est $x^2 - 1,4x + 0,4$.
2. En déduire l'existence et la valeur des valeurs propres λ et μ de M.
3. (a) On pose $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $MV = \lambda V \Leftrightarrow x = 3y$. En déduire un vecteur propre V.
   (b) On pose $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $MW = \mu W \Leftrightarrow x = -y$. En déduire un vecteur propre W.
   (c) Montrer que $P = \begin{pmatrix} V & W \end{pmatrix}$ est inversible. En déduire que M est diagonalisable et expliciter P, P^{-1} et D.
4. Montrer, par récurrence sur n, que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire les coefficients de M^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4.3 Suites et limites de matrices

4.3.1 Cas général

Définition 4.4. De la même manière qu'on définit une suite de nombres, on peut définir une suite de matrices comme une application qui à chaque entier naturel n associe une matrice U_n, ces matrices U_n étant toutes de mêmes dimensions.

Remarque. Une suite (U_n) de matrices peut aussi être considérée comme une matrice U_n dont tous les coefficients sont des termes de suites numériques (éventuellement stationnaires).

Définition 4.5. Une suite de matrices converge si et seulement si toutes les suites formant les coefficients de cette matrice convergent.

Exemple 4.4. On peut considérer la suite de matrice (U_n) où $U_n = M^n$ où M est la matrice de l'activité d'introduction. On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times 0,4^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times 0,4^n \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times 0,4^n & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times 0,4^n \end{pmatrix}$

Cette suite de matrices converge vers la matrice $U = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

4.3.2 Un cas particulier : suites de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$

Propriété 4.5. *Soit :*
- (U_n) *une suite de matrices colonnes de taille* p *;*
- A *une matrice carrée non nulle d'ordre* p *;*
- B *une matrice colonne de taille* p*,*

telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.
S'il existe une matrice C *telle que* $C = AC + B$ *alors,* $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.

La preuve sera faite en classe.

Remarque. Dans le cas de la modélisation d'un graphe probabiliste, si la matrice C existe, elle est appelé *état stable* du système. On a alors le théorème suivant (qu'on admettra).

Théorème 4.6. *Si la matrice de transition* A *d'un processus modélisable par un graphe probabiliste (on dit aussi une* marche aléatoire*), admet une puissance dont tous les coefficients sont strictement positifs, alors le système admet un unique état stable et la suite des états probabilistes converge vers l'état stable indépendamment de l'état initial.*

Méthode pour trouver l'état stable

$C = AC + B \Leftrightarrow C - AC = B \Leftrightarrow I_nC - AC = B \Leftrightarrow (I_n - A)C = B$.
Si $I_n - A$ est inversible, $C = (I_n - A)^{-1}B$.

4.4 Exercices et problèmes

4.4.1 Preuves

EXERCICE 4.1.
On s'intéresse dans cet exercice aux matrices triangulaires supérieures.

1. Matrices d'ordre 2
   (a) Soit M et M' deux matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 à coefficients réels. Montrer que MM' est aussi une matrice triangulaire supérieure.
   (b) Montrer, par récurrence sur n, que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, M^n est aussi une matrice tiranngulaire supérieure.
2. Matrices d'ordre 3
   Reprendre la démonstration précédente pour une matrice triangulaire supérieure d'ordre 3.

4.4.2 Calculs par blocs

EXERCICE 4.2.

On considère la matrice M écrite en blocs $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ où $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

1. Quel est le format de M ?
2. Écrire M avec tous ses coefficients.
3. Calculer M^2 à la main de la manière suivante :
   (a) Effectuer le calcul de M^2 en considérant l'écriture de M par blocs.
   (b) Calculer les produits A^2, BC, etc. nécessaires pour expliciter M^2.
   (c) Donner alors M^2.

EXERCICE 4.3.

On considère la matrice M suivante :

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

En calculant par blocs, montrer que

$$M^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

4.4.3 Diagonalisation

EXERCICE 4.4.

On considère les matrices : $M=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit PQ et le produit QP. En déduire que P est inversible.
2. $D=P^{-1}MP$. Calculer D.
3. Montrer que $M=PDP^{-1}$ puis que $M^n=PD^nP^{-1}$ pour tout n de N^*.
4. Calculer D^n et en déduire M^n.

EXERCICE 4.5.

Soit $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

1. Soit $V=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix}-3\\ 4\end{pmatrix}$.
   (a) Calculer AV et AW. En déduire que A admet deux valeurs propres que l'on précisera.
   (b) Soit $D=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$. Donner une matrice carrée P telle que $A=PDP^{-1}$. Vérifier en calculant PDP^{-1}.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $A^n=PD^nP^{-1}$.
3. Calculer D^n et en déduire A^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 4.6.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 4 & -2\end{pmatrix}$.

1. Soit x un réel et V une matrice colonne 2×1.
   (a) Montrer que $AV=xV \Leftrightarrow (A-xI_2)V=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.
   (b) Justifier que pour qu'il existe une matrice V non nulle, vérifiant cette égalité, il est nécessaire que le déterminant de la matrice $A-xI_2$ soit nul.
   (c) En déduire les valeurs possibles λ et μ de x.
2. Déterminer $V=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ et $W=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$ non proportionnelles telles que $AV=\lambda V$ et $AW=\mu W$.
3. Diagonaliser la matrice A.
4. En déduire A^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

4.4.4 Suites de matrices

EXERCICE 4.7.
Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définies par $U_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et par la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = AU_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix}0,3 & -0,1\\0,2 & 0\end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^n = 0,1^n \begin{pmatrix}2^{n+1}-1 & 1-2^n\\2^{n+1}-2 & 2-2^n\end{pmatrix}$.
   En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
2. La suite (U_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 4.8.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}0,3 & 0,2\\0,1 & 0,4\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix}$.

On définit la suite de matrices (U_n) par $U_0 = \begin{pmatrix}24\\3\end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = AU_n + B$.

1. Montrer que $A = PDQ$, avec $P = \begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}0,5 & 0\\0 & 0,2\end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.
2. Calculer QP et en déduire A^n en fonction de n.
3. Exprimer U_n en fonction de n, puis étudier la convergence de la suite (U_n).

EXERCICE 4.9.
On considère une suite réelle (u_n) définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement asymptotique de (u_n).
3. On considère la suite de matrices colonnes (V_n) définie, $\forall n \in \mathbb{N}$, par $V_n = \begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$, où $A = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\1 & 0\end{pmatrix}$ puis que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$.
   (b) Diagonaliser la matrice A puis déterminer A^n.
   (c) En déduire V_n puis u_n en fonction de n.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n).

4.4.5 Problèmes d'évolution

EXERCICE 4.10.
Deux joueurs de tennis A et B décident de jouer une partie toutes les semaines.
La probabilité que A gagne une partie de la première semaine est 0,7. Si A gagne la partie de la semaine n, B tirant des enseignements de sa défaite, la probabilité que A l'emporte la semaine suivante est seulement de 0,4. Si A perd la partie la semaine n, il change de stratégie et la probabilité qu'il gagne la semaine suivante est de 0,9.
On note A l'état « A gagne la semaine n » et B l'état « B gagne la semaine n ».

1. Écrire la matrice de transition associée à cette marche aléatoire, en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
2. Déterminer si un état stable existe et, si oui, quel est-il.
3. Conclure.

EXERCICE 4.11.
Un individu susceptible de contracter une maladie peut être dans un des trois états suivants :

S : sain ;

M : malade/infecté par la maladie ;

I : immunisé.

Son état peut changer tous les trois mois selon les probabilités suivantes :

- Si l'individu est sain, il le reste avec une probabilité de 0,6 ou bien il devient malade avec une probabilité de 0,3 ou bien il devient immunisé
- Si l'invidivu est malade, il le reste avec une probabilité de 0,1 ou bien il devient immunisé
- Si l'invidivu est immunisé, il le reste avec une probabilité de 0,9 ou bien il perd son immunité et devient sain.

1. Construire le graphe probabiliste associé à cette marche aléatoire.
2. Déterminer sa matrice de transition P en considérant ses états dans l'ordre S, M et I.
3. Faire une étude asymptotique de cette marche aléatoire.

EXERCICE 4.12.
Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit nommés respectivement Aurore et Boréale.
Pour mesurer l'efficacité des campagnes publicitaires, on interroge chaque semaine les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.
Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.
La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.
Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.
3. (a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   (b) Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix}0,3 & 0,7\end{pmatrix}$.
   (c) Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.
4. On cherche λ réel tel qu'il existe une matrice non nulle $V = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ telle que $MV = \lambda V$.
   (a) Justifier que $M - \lambda I_2$ ne doit pas être inversible.
   (b) En déduire les valeurs λ_1 et λ_2 possibles pour λ.
   (c) Déterminer deux matrices colonnes V_1 et V_2 de format 2×1 non proportionnelles telles que : $MV_1 = \lambda_1 V_1$ et $MV_2 = \lambda_2 V2$.
   (d) En déduire une matrice carrée P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.
   (e) En déduire que :
   $$M^n = \begin{pmatrix}\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n & \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n & \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n\end{pmatrix}$$
   (f) Déterminer la limite M_∞ de la suite (M^n) quand n tend vers $+\infty$.
   (g) Déterminer l'état limite L, limite de P^n quand n tend vers $+\infty$. Vérifier que $LM = L$.
   (h) Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ?