

Devoir surveillé n°4 : un corrigé

EXERCICE 4.1 (8 points).

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 10 \times u_n + 21$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

$$u_1 = 10 \times u_0 + 21 = 31 \quad u_2 = 331 \quad u_3 = 3331.$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

Nous allons démontrer que la propriété $\mathcal{P}(n) : 3u_n = 10^{n+1} - 7$ est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : D'une part $3u_0 = 3$, d'autre part $10^{0+1} - 7 = 3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier, supposons que $\mathcal{P}(k) : 3u_k = 10^{k+1} - 7$ est vraie.

$$3u_{k+1} = 3 \times (10 \times u_k + 21) = 10 \times 3u_k + 63 = 10 \times (10^{k+1} - 7) + 63 = 10^{k+2} + 70 - 63 = 10^{k+2} - 7.$$

Donc, dans ce cas, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie; si $\mathcal{P}(k)$ vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie; donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

En déduire l'écriture du nombre u_n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3u_n = 10^{n+1} - 7 = \underbrace{10 \dots 0}_{n+1} - 7 = \underbrace{9 \dots 9}_n 3 \text{ donc } u_n = \underbrace{3 \dots 3}_n 1.$$

3. (a) Justifier que $-7 \equiv 4 \pmod{11}$ puis que $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

Pour montrer que $a \equiv b \pmod{n}$, on doit montrer que, soit les deux nombres ont le même reste par la division par 11 (définition), soit que $a - b$ est divisible par n (propriété équivalente).

Méthode 1 : Division euclidienne par 11. On sait qu'il existe un unique couple d'entiers $(q; r)$ avec $0 \leq r < 11$ tel que $a = q \times 11 + r$, donc si on en trouve un (couple) alors r sera l'unique reste.

$-7 = -1 \times 11 + 4$ et $4 = 0 \times 11 + 4$ donc -7 et 4 ont le même reste par la division euclidienne par 11, donc $-7 \equiv 4 \pmod{11}$.

$10 = 0 \times 11 + 10$ et $-1 = -1 \times 11 + 10$ donc 10 et -1 ont le même reste par la division euclidienne par 11, donc $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

Méthode 2 : $a - b$ divisible par 11. $-7 - 4 = -11 = -1 \times 11$ donc $-7 - 4$ est divisible par 11, donc $-7 \equiv 4 \pmod{11}$.

$10 - (-1) = 11 = 1 \times 11$ donc $10 - (-1)$ est divisible par 11 donc $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n : $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3u_n = 10^{n+1} - 7 \equiv (-1)^{n+1} + 4 \pmod{11} \equiv 4 + (-1)(-1)^n \pmod{11} = 4 - (-1)^n \pmod{11}.$$

On peut déduire que $3u_n \equiv 3 \pmod{11}$ ou $3u_n \equiv 5 \pmod{11}$ selon la parité de n .

- (c) En déduire que pour tout entier naturel n , u_n ne peut pas être divisible par 11.

Pour éviter la division par 3, toujours délicate dans le cadre des congruences, on va choisir de partir de u_n .

Raisonnons par l'absurde : Supposons que u_n est divisible par 11.

Alors $u_n \equiv 0 \pmod{11}$ donc $3u_n \equiv 0 \pmod{11}$ ce qui est impossible car on a vu que $3u_n \equiv 3 \pmod{11}$ ou $3u_n \equiv 5 \pmod{11}$.

Donc u_n n'est pas divisible par 11.

4. (a) Donner le reste de la division euclidienne de 10^4 par 17.
En déduire que $10^6 \equiv 1 \pmod{17}$.

Zut, j'ai perdu ma calculatrice! Pas grave, je vais tout faire à la main en étant malin.

10^4 est pénible à diviser à la main par 17. Intéressons-nous plutôt à 10^2 .

$$10^2 = 100 = 5 \times 17 + 15 \equiv 15 \pmod{17}$$

Cependant, 15 est un « grand » nombre qui ne rend pas les calculs beaucoup plus simples.

Remarquons que $0 \equiv 17 \pmod{17}$ donc $10^2 - 0 \equiv 15 - 17 \pmod{17} = -2 \pmod{17}$.
-2 va rendre les calculs plus simples.

$$\text{En effet : } 10^4 = (10^2)^2 \equiv (-2)^2 \pmod{17} \equiv 4 \pmod{17}.$$

$$10^8 = (10^4)^2 \equiv 4^2 \pmod{17} \equiv 16 \pmod{17} \equiv 16 - 17 \pmod{17} \equiv -1 \pmod{17}.$$

$$10^{16} = (10^8)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{17} \equiv 1 \pmod{17}.$$

- (b) En déduire que, pour tout entier naturel k , $3u_{16k+8}$ est divisible par 17, puis que u_{16k+8} est divisible par 17.

$$3u_{16k+8} = 10^{16k+8+1} - 7 = (10^{16})^k \times 10^8 - 7 \equiv 1^k \times (-1) \times 10 - 7 \pmod{17} \equiv -17 \pmod{17} \equiv -17 + 17 \pmod{17} \equiv 0 \pmod{17}.$$

Donc $3u_{16k+8}$ est divisible par 17.

Il existe donc un entier K tel que $3u_{16k+8} = K \times 17$ et, comme 3 ne divise pas 17, 3 divise K donc il existe un entier K' tel que $u_{16k+8} = K' \times 17$ donc u_{16k+8} est divisible par 17.

EXERCICE 4.2 (7 points).

Partie A : Établir que, pour tout a, b, a' et b' entiers et m entier supérieur ou égal à 2, si $a \equiv b \pmod{m}$ et $a' \equiv b' \pmod{m}$ alors $aa' \equiv bb' \pmod{m}$.

Voir le cours.

Partie B : On considère $\mathcal{F} : 11x^2 - 7y^2 = 5$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. (a) Démontrer que si le couple $(x; y)$ est solution de $\mathcal{F}$ alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$.

$11 \equiv 1 \pmod{5}$ et $7 \equiv 2 \pmod{5}$ donc, si $11x^2 - 7y^2 = 5$, alors $1x^2 - 2y^2 \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$ (la relation de congruence est compatible avec l'addition et la soustraction).

- (b) Soit x et y des entiers relatifs; en étudiant les congruences modulo 5 de x , dresser un tableau de congruences modulo 5 pour x^2 ; faire de même pour $2y^2$.

x ou y	0	1	2	3	4
Modulo 5 : x^2	0	1	4	$9 \equiv 4$	$16 \equiv 1$
$2y^2$	0	2	$8 \equiv 3$	$18 \equiv 3$	$32 \equiv 2$

- (c) Si le couple $(x; y)$ est solution de $\mathcal{F}$, d'après le tableau précédent, quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 par 5 et de $2y^2$ par 5?

On a vu que si $11x^2 - 7y^2 = 5$ alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$, alors le seul reste possible pour x^2 et pour $2y^2$ est 0 (le reste de la division de x^2 par 5 ne pouvant être 2 ou 3 et le reste de la division de $2y^2$ par 5 ne pouvant pas être 1 ou 4).

- (d) En déduire que si le couple $(x; y)$ est solution de $\mathcal{F}$ alors x et y sont des multiples de 5.

Pour que les restes soient 0, il faut que x et y soient congrus à 0 modulo 5, donc il faut qu'ils soient des multiples de 5.

2. On suppose maintenant que x et y sont des multiples de 5; démontrer alors que le couple $(x; y)$ ne peut pas être solution de $\mathcal{F}$.

Supposons que x et y sont des multiples de 5, c'est-à-dire qu'il existe un couple d'entiers $(k; k')$ tel que $x = 5k$ et $y = 5k'$.

$11x^2 - 7y^2 = 5 \Leftrightarrow 11 \times 5^2 \times k^2 - 7 \times 5^2 \times k'^2 = 5 \Leftrightarrow 5(11k^2 - 7k'^2) = 1 \Leftrightarrow 11k^2 - 7k'^2 = \frac{1}{5}$ ce qui est impossible $11k^2 - 7k'^2$ est un nombre entier. Donc si x et y sont multiples de 5, le couple $(x; y)$ n'est pas solution de $\mathcal{F}$.

3. Que peut-on en déduire pour l'équation $\mathcal{F}$?

On a, à la fois :

- Si $(x; y)$ solution de $\mathcal{F}$ alors x et y sont multiples de 5;
- Si x et y sont multiples de 5 alors ils ne sont pas solution de $\mathcal{F}$.

On en conclut que $\mathcal{F}$ n'a pas de couple $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solution (dans l'ensemble des entiers) ou, dit autrement, pour tous entiers relatifs x et y , $11x^2 - 7y^2 \neq 5$.