# Devoir surveillé n°4

## Congruence

**EXERCICE 4.1** (8 points)**.**
On considère la suite $(u_n)$ d'entiers naturels définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 10 \times u_n + 21$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ : $3u_n = 10^{n+1} - 7$.
   En déduire l'écriture du nombre $u_n$.
3. (a) Justifier que $-7 \equiv 4 \pmod{11}$ puis que $10 \equiv -1 \pmod{11}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n$ : $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ ne peut pas être divisible par 11.
4. (a) Donner le reste de la division euclidienne de $10^4$ par 17.
   En déduire que $10^6 \equiv 1 \pmod{17}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $k$, $3u_{16k+8}$ est divisible par 17, puis que $u_{16k+8}$ est divisible par 17.

---

**EXERCICE 4.2** (7 points)**.**

**Partie A :** Établir que, pour tout $a$, $b$, $a'$ et $b'$ entiers et $m$ entier supérieur ou égal à 2, si $a \equiv b \pmod{m}$ et $a' \equiv b' \pmod{m}$ alors $aa' \equiv bb' \pmod{m}$.

**Partie B :** On considère $\mathscr{F} : 11x^2 - 7y^2 = 5$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

1. (a) Démontrer que si le couple $(x ; y)$ est solution de $\mathscr{F}$ alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$.
   (b) Soit $x$ et $y$ des entiers relatifs; en étudiant les congruences modulo 5 de $x$, dresser un tableau de congruences modulo 5 pour $x^2$ ; faire de même pour $2y^2$.
   (c) Si le couple $(x ; y)$ est solution de $\mathscr{F}$, d'après le tableau précédent, quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $x^2$ par 5 et de $2y^2$ par 5 ?
   (d) En déduire que si le couple $(x ; y)$ est solution de $\mathscr{F}$ alors $x$ et $y$ sont des multiples de 5.
2. On suppose maintenant que $x$ et $y$ sont des multiples de 5; démontrer alors que le couple $(x ; y)$ ne peut pas être solution de $\mathscr{F}$.
3. Que peut-on en déduire pour l'équation $\mathscr{F}$ ?

---