Devoir surveillé n°2

Matrices

QUESTION DE COURS (3 points)
Soit a, b et c trois nombres entiers relatifs ; démontrer que si a divise b et b divise c, alors a divise c.

EXERCICE 2.1 (6 points).
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.).
Pour chaque question trois réponses sont possibles. Cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s). Si aucune des trois réponses n'est correcte, cocher « aucune ».
Chaque question est notée sur 1,5. En cas d'erreur ou d'oubli, tous les points sont perdus.
Aucune justification n'est attendue.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I_2 la matrice unité d'ordre 2.

1. ☐ A est diagonale ☐ ${}^{t}A$ est diagonale ☐ B est diagonale ☐ Aucune
2. ☐ $A = I_2 + B$ ☐ $A^2 = I_2 + 2B$ ☐ $A^3 = I_2 + 3B$ ☐ Aucune
3. ☐ $B^2 = B$ ☐ B^2 est la matrice nulle ☐ $2A - 2B = 2I_2$ ☐ Aucune
4. ☐ $A \times B = B$ ☐ $I_2 \times B = B$ ☐ $B \times A = B$ ☐ Aucune

EXERCICE 2.2 (5 points).

1. Écrire la matrice M sachant que ses éléments vérifient : $m_{ij} = i \times j$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$.
2. Écrire la matrice N sachant que ses éléments vérifient : $n_{ij} = i \times j$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$.
3. Déterminer la matrice P produit NM des matrices N et M.
4. Déterminer la matrice Q produit MN des matrices M et N.
5. On donne les matrices $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   Choisir, parmi les 7 calculs suivants, ceux qu'il est possible d'effectuer en justifiant :
   - $3 \times Q + R$
   - $P - 2 \times R$
   - $\frac{1}{2}P$
   - $M \times T$
   - $M \times R$
   - N^2
   - R^2