Chapitre 3

Évolutions

Sommaire

3.1 Activités

ACTIVITÉ 3.1.
Le tableau ci-dessous donne le nombre de nuités en milliers dans les camping français :

Année	2006	2007	2008	2009	2010
Nuitée (en milliers)	63 748	62 279	63 494	68 080	68 835

1. Calculer la différence $63\,494 - 62\,279$.
   Cette différence est la *variation absolue* en milliers du nombre de nuitées entre 2007 et 2008.
2. Calculer, à 0,001 près, le quotient :
   $$t = \frac{63\,494 - 62\,279}{62\,279}$$
   Ce quotient est le *taux d'évolution* (ou *variation relative*) du nombre de milliers de nuitées entre 2007 et 2008.
3. Écrire le nombre précédent sous la forme $\frac{p}{100}$.
   On dit que « p % est le *pourcentage d'évolution* du nombre de milliers de nuitées entre 2007 et 2008 ».
4. Calculer la variation absolue du nombre de nuitées, le taux d'évolution du nombre de nuitées d'une année à l'autre de 2006 à 2007 puis de 2009 à 2010.

ACTIVITÉ 3.2.
Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2 000, trois villes ont une population de 25 000 habitants.

1. *Ville 1*
   (a) La population de la première ville augmente de 6 % en 2 000, en 2 001 et en 2 002.
   En déduire sa population au 1$^{\text{er}}$ janvier 2 003.
   (b) Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée :

i. entre le 1er janvier 2 000 et le 1er janvier 2 001 ?
ii. entre le 1er janvier 2 001 et le 1er janvier 2 002 ?
iii. entre le 1er janvier 2 002 et le 1er janvier 2 003 ?

Ce nombre s'appelle le *coefficient multiplicateur* correspondant à une augmentation de 6 %.

(c) Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée entre le 1er janvier 2 000 et le 1er janvier 2 003 ?
À quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?

2. *Ville 2*
Le 31 décembre 2 000, la deuxième ville a une population de 26 400 habitants.
Calculer le coefficient multiplicateur correspondant et en déduire le pourcentage d'augmentation.

3. *Ville 3*
La population de la troisième ville diminue de 6 % durant l'année 2 000.
   (a) Calculer sa population à la fin 2 000, puis le coefficient multiplicateur correspondant.
   (b) Si la population augmente de 6 % l'année suivante, calculer sa population à la fin 2 001.
   En déduire le pourcentage global d'évolution sur les deux années de début 2 000 à fin 2 001.

3.2 Bilan et compléments

3.2.1 Évolution d'une grandeur

Définition 3.1. Une grandeur évolue d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2.
- La différence $y_2 - y_1$ est appelée *variation absolue* de y_1 à y_2.
- Le rapport $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ s'appelle *taux d'évolution* (ou *variation relative*) de y_1 à y_2.
- Soit p le nombre tel que $\frac{y_2 - y_1}{y_1} = \frac{p}{100}$.
  $\frac{p}{100} = p\,\%$ est appelé *pourcentage d'évolution* de y_1 à y_2.

3.2.2 Coefficient multiplicateur

Définition 3.2. Dire qu'une quantité Q évolue de $t\,\%$, où t est un réel quelconque, signifie que Q :
- augmente de $t\,\%$ si t est positif ;
- diminue de $|t|\,\%$ si t est négatif.

Propriété 3.1. *Faire évoluer une quantité Q de t % revient à la multiplier Q par* $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
$k = \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ *est appelé* coefficient multiplicateur *correspondant à une évolution de t %.*

Preuve. Soit Q la valeur de la grandeur avant l'évolution et Q' celle après l'évolution.
- Dans le cas d'une augmentation de $t\,\%$ où t est positif, c'est-à-dire dans le cas d'une évolution de $t\,\%$, on a :
  $Q' = Q + Q \times \frac{t}{100} = Q \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
- Dans le cas d'une diminution de $t\,\%$ où t est positif, c'est-à-dire dans le cas d'une évolution de $-t\,\%$, on a :
  $Q' = Q - Q \times \frac{t}{100} = Q \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = Q \times \left(1 + \frac{-t}{100}\right)$.

◇

Propriété 3.2. *Le* coefficient multiplicateur k *d'une grandeur passant de la valeur initiale* $V_I \neq 0$ *à la valeur finale* V_F *est donné par :* $k = \frac{V_F}{V_I}$.
On a de plus $t = (k-1) \times 100$.

Preuve.

- On a vu que $V_F = V_I \times k$ donc $k = \frac{V_F}{V_I}$.
- Par définition $k = 1 + \frac{t}{100} \Leftrightarrow k - 1 = \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = (k-1) \times 100$.

♢

3.3 Exercices

EXERCICE 3.1.

1. Calculer les coefficients multiplicateurs dans chacun des cas suivants :
   - hausse de 20 % ;
   - hausse de 0,1 % ;
   - hausse de 100 % ;
   - hausse de 300 % ;
   - baisse de 15 % ;
   - baisse de 5,2 % ;
   - baisse de 85 % ;
   - baisse de 100 %.
2. Donner les pourcentages de hausse ou de baisse associés aux coefficients multiplicateurs suivants :
   - 1,25 ;
   - 3 ;
   - 1,0049 ;
   - 0,5 ;
   - 0,98 ;
   - 1,001 ;
   - 1,0101 ;
   - 0,999 ;
   - 1,175 ;
   - 1,01 ;
   - 0,875 ;
   - 0,1.
3. Donner le pourcentage d'évolution pour une grandeur qui passe :
   - de 12 540 à 13 620 ;
   - de 5,7 à 2,6 ;
   - 21 000 à 84 000.

EXERCICE 3.2.
Voici les chiffres d'affaires d'une entreprise (fictive) pendant quatre ans :

Année	1 997	1 998	1 999	2 000
CA (en millions d'€)	35	38	41	44

1. De combien de millions d'euros, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?
2. De combien de millions d'euros en pourcentage, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?

EXERCICE 3.3.

1. En août un loyer était de 564 €. Un an plus tard il est de 589 €. Quelle est son évolution en pourcentage ?
2. Le chiffre d'affaire d'une entreprise en 2 004 était de 124 000 €. En 2 005, les prévisions donnent un chiffre d'affaire de 117 000 €seulement. Quelle est son évolution en pourcentage ?
3. Pour un même produit, le magasin A propose 20 % de produit en plus pour la même prix et le magasin B propose 20 % de remise sur le prix pour une même quantité.
   Si 1 Kg de produit coûte 100 euros, quelle est la proposition la plus avantageuse pour le client ?
4. Après une augmentation de 15 %, un produit coûte 89,70 €. Quel était son prix initial ?

EXERCICE 3.4.
Dire que la TVA est de 19,6 % revient à dire que le prix hors taxe (HT) a été augmenté de 19,6 % de TVA pour obtenir le prix toutes taxes comprises (TTC).

1. Par quel nombre doit-on multiplier le prix HT pour obtenir le prix TTC ?
2. Un article vaut 120 € HT. Combien va-t-on le payer en magasin ?
3. Vous payez un article en magasin (donc TTC) à 200 €. À combien s'élève le prix HT et la TVA en € ?
4. Laquelle de ces deux propositions est la plus avantageuse :
   - Proposition 1 : Faire une remise de 10 % sur le prix HT, puis appliquer la TVA.
   - Proposition 2 : Appliquer la TVA, puis faire une remise de 10 % sur le prix TTC.

EXERCICE 3.5.

1. Au moment des soldes, un magasin propose une baisse de 10 % sur un article, suivie d'une nouvelle baisse de 20 % sur ce même article.
   Ces deux diminutions peuvent être remplacées par une diminution unique. Déterminer le pourcentage de cette diminution.
2. Le prix d'un article augmente de 22 % puis diminue de 15 %. Quel est le pourcentage d'évolution de cet article ?
3. Le prix d'un produit subit successivement une hausse de 12 %, une baisse de 5 %, une baisse de 8 % et une hausse de 2 %. Quel est le pourcentage de variation final.
4. Si le nombre de chômeurs dans une ville diminue de 2 % par mois pendant un an, quel sera le pourcentage de diminution du nombre de chômeurs sur l'année ?
5. Un client veut acheter un véhicule qui coûtait 17 000 € le mois dernier mais qui, depuis, a augmenté de 4 %. Le vendeur consent une remise de 3,85 %. Le modèle coûte-t-il plus ou moins de 17 000 € ?

EXERCICE 3.6.

1. Après une augmentation de 5 % suivie d'une hausse de t %, on obtient une hausse globale de 17,6 %. Combien vaut t ?
2. À la bourse de Paris, l'action Renault :
   - a augmenté de 1,45 % entre le 10 juin 2 000 et le 11 juin 2 000 ;
   - a baissé de 0,5 % entre le 10 juin 2 000 et le 12 juin 2 000.

   Quelle a été son évolution entre le 11 juin 2 000 et le 12 juin 2 000 ?
3. Après deux augmentation successives de t % le prix d'un produit a globalement augmenté de 20 %. Combien vaut t ?
4. Après une augmentation de t % suivie d'une baisse de t %, on obtient une baisse globale de 4 %. Combien vaut t ?
5. Un article subit une augmentation de 10 %. Quel pourcentage de baisse doit-on appliquer pour compenser cette hausse ?

EXERCICE 3.7.

1. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 2 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 6 % ?
2. Est-il pertinent de dire qu'une hausse de 1 % suivie d'une baisse de 3 % suivie d'une hausse de 2% sont approximativement équivalentes à une évolution globale de 0 % ?
3. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 20 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globales de 60 % ?