Devoir maison n°3

Centre de gravité

À rendre pour le mercredi 19 octobre

ABC est un triangle quelconque.

A' , B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

G est l'intersection des médianes (BB') et (CC') .

Partie A.

On va démontrer une propriété connue :

Les trois médianes sont concourantes en G

On suppose donc dans cette partie qu'on ne sait pas que $G \in (AA')$ et on va le démontrer.

1. Soit D le symétrique de A par rapport à G .
Montrer, en utilisant éventuellement la propriété de la droite des milieux, que $BGCD$ est un parallélogramme.
2. En déduire que la troisième médiane (AA') passe aussi par G .

Partie B.

Déduire de ce qui précède que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

La démonstration serait semblable pour les deux autres médianes.

Partie C.

On va démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

1. Soit E le point tel que $ABEC$ parallélogramme.
Que peut-on en déduire pour A' ?
Que peut-on en déduire pour $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$?
2. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Partie D.

Démontrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.