Chapitre 2

Matrices

Sommaire

2.1 Activités **9**
2.2 Bilan et compléments **13**
2.2.1 Définitions 13
2.2.2 Égalité de deux matrices 13
2.2.3 Addition de matrices 13
2.2.4 Multiplication de matrices 14
2.3 Deux applications **15**
2.3.1 Résolutions de systèmes 15
2.3.2 Graphes probabilistes 15
2.4 Exercices **17**
2.4.1 Technique 17
2.4.2 Systèmes 18
2.4.3 Graphes probabilistes 20
2.4.4 Pour aller plus loin 21

2.1 Activités

Activité 2.1 (Carrés magiques).
Un carré magique est un tableau carré dans lequel la somme des termes des lignes, des colonnes ou des diagonales est la même.

Un exemple de tel tableau est donné ci-dessous :

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Carré magique sur le portail de la basilique Sagrada Familia de Barcelone où la somme correspond à l'âge auquel le Christ est mort.

En mathématiques (et donc dans toutes les sciences) on manipule ce genre de tableaux en les écrivant de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 14 & 4 \\ 11 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Cet objet mathématique est appelé *matrice*.

Pour la suite de l'activité, on écrira ces tableaux sous forme de matrice.

1. Montrer que la matrice ci-dessous correspond à un carré magique.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que la matrice précédente peut s'écrire sous la forme de la « somme » des trois matrices ci-dessous.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   On écrira simplement $A = B + C + D$.

3. Montrer qu'en multipliant tous les coefficients de la matrice A par 5, on obtient une matrice E correspondant encore à un carré magique.

   On écrira simplement $E = 5A$.

4. En utilisant les notations introduites précédemment, déterminer la matrice F telle que $F = 2B + 3C + 4D$.
   Cette matrice correspond-elle à un carré magique ?

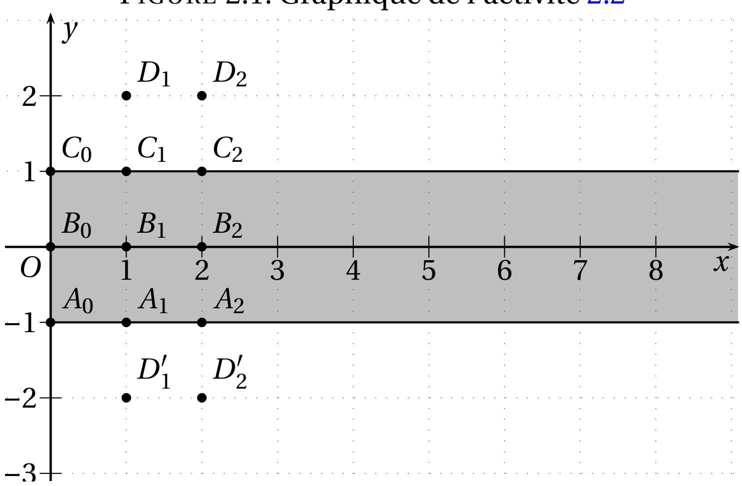
ACTIVITÉ 2.2 (Le promeneur)**.**
Un promeneur perdu dans ses pensées mathématiques se retrouve subitement marchant sur un terre-plein central entre deux voies de bus. Le terre-plein prenant la forme d'un trottoir de 1 m de large, on suppose que la marche de notre promeneur, aussi hasardeuse soit-elle, respecte les règles suivantes :

- il se déplace uniquement en diagonale de façon équiprobable vers la gauche ou vers la droite et indépendamment des pas effectués auparavant ;
- chaque pas le fait progresser de 50 cm sur le terre-plein central ;
- il ne revient jamais en arrière ;
- un seul pas dans une des voies de bus de part et d'autre du terre-plein entraîne un accident et la fin de la marche.

On cherche à estimer quelles sont les chances du promeneur d'atteindre l'extrémité du terre-plein, située à 15 m de lui.

Partie A : Modélisation dans un repère orthornormé
Le terre-plein est matérialisé en gris sur la figure 2.1 de la présente page.

FIGURE 2.1: Graphique de l'activité 2.2



On suppose que notre promeneur débute sa marche à partir de l'un des points A_0, B_0 ou C_0. Une unité sur chaque axe représente 50 cm en réalité.

- Du point A_0, il ne peut rejoindre que B_1 ou D'_1.
- Du point B_0, il ne peut rejoindre que C_1 ou A_1.
- Du point C_0, il ne peut rejoindre que D_1 ou B_1.

Les règles sont les mêmes de l'étape 1 vers l'étape 2, à la différence près qu'il ne peut revenir sur le terre-plein à partir de D_1 ou de D'_1 : un accident met fin à sa marche.
Pour la commodité de la situation, on confond les positions D_1 et D'_1 ainsi que D_2 et D'_2.

1. Quelle est la probabilité que le promeneur partant de C_0 arrive en A_1 ? En B_1 ? En C_1 ? En D_1 ?
2. Quelle est la probabilité que le promeneur partant de B_1 arrive en B_2 ? En A_2 ? En C_2 ? Sur une des voies de bus, c'est à dire en D_2 ou D'_2 ? On pourra recourir à un arbre.
3. Quelle est la probabilité que le promeneur partant de B_0 arrive en B_2 ? En C_2 ? En D_2 (ou D'_2) ?
4. Quelle est la probabilité que le promeneur partant de A_0 arrive en B_3 ? En A_3 ? En D_3 (ou D'_3) ? L'utilisation d'un arbre est-elle toujours aisée ?

Partie B : Des matrices en guise d'arbre de probabilité

Soit la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Les a_{ij} désignent des nombres, ce sont les coefficients de la matrice.
Le nombre i indique le numéro de la ligne, le nombre j indique le numéro de la colonne dans laquelle se trouve le nombre a_{ij}.
Ainsi, a_{23} désigne le terme situé à l'intersection de la deuxième ligne et de la troisième colonne.
Dans notre modèle, on associe :

- la première ligne et la première colonne aux positions de type A de notre marcheur,
- la deuxième ligne et la deuxième colonne aux positions de type B,
- la troisième ligne et la troisième colonne aux positions de type C,
- et la quatrième ligne et la quatrième colonne aux positions de type D,

de la manière suivante : le nombre a_{23}, par exemple, représente la probabilité de passer de la position B à la position C en une étape.

1. Remplacer chacun des nombres a_{ij} par leur valeur dans notre problème.

   La matrice M contient ainsi les probabilités correspondant à tous les déplacements possibles de notre marcheur **en un pas**, quelle que soit sa position de départ.
2. (a) Quelle serait la matrice présentant les probabilités correspondant à tous les déplacements possibles de notre marcheur **en deux pas**, quelle que soit sa position de départ ? On note M^2 cette matrice et on appelle b_{ij} ses coefficients.

   (b) Justifier que $b_{13} = a_{11} \times a_{13} + a_{12} \times a_{23} + a_{13} \times a_{33} + a_{14} \times a_{43}$.

   (c) On appelle produit de CAYLEY de la matrice M par elle-même la matrice dont les coefficients sont définis de la façon suivante :

   $$b_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} \times a_{kj}$$

   Écrire un algorithme permettant de calculer M^{30}. Conclure.

ACTIVITÉ 2.3 (Sommes et multiplications de matrices)**.**
Le tableau a contient les notes de quatre élèves lors de 3 devoirs : D_1, D_2 et D_3.
Les élèves terminent la correction chez eux et gagnent de 0 à 2 points supplémentaires comme indiqué dans le tableau b.
Les coefficients des trois devoirs sont donnés dans le tableau c.

Tableau a

	D_1	D_2	D_3
Sarah	12	15	8
David	10	12	13
Nina	16	18	17
Louis	8	15	9

Tableau b

	D_1	D_2	D_3
Sarah	1	0	2
David	2	1	0
Nina	1	0	2
Louis	2	2	2

Tableau c

D_1	1
D_2	4
D_3	2

On appelle A, B et C les matrices correspondant respectivement aux tableaux a, b et c.

1. Calculer les notes finales obtenues par les élèves.
   Comment pourrait-on obtenir la matrice D correspondant à ces notes finales en fonction des matrices A et B ?
2. Calculer le total des points obtenu par chaque élève en tenant compte des coefficients.
   Comment pourrait-on obtenir la matrice E correspondant à ces totaux en fonction des matrices D et C ?
3. Calculer la moyenne de chacun des élèves.
   Comment pourrait obtenir la matrice F correspondant à ces moyennes en fonction de la matrice E ?

ACTIVITÉ 2.4 (Produits de matrices)**.**
Le tableau m ci-dessous donne les prix, en euros, de trois shampooings avec ou sans remise de fidélité.
Le tableau n indique les quantités achetées par deux clientes A et B.

Tableau m

	Nutri	Color	Milky
Prix unitaire	6	7	9
Prix avec remise	5	5	8

Tableau n

Quantités	A	B
Nutri	3	2
Color	1	1
Milky	2	2

On appelle M et N les matrices correspondant respectivement aux tableaux m et n.

Calculer le prix total payé par chaque cliente selon qu'elle bénéficie ou non de la remise.
Comment pourrait obtenir la matrice O correspondant à ces prix en fonction des matrices M et N ?

2.2 Bilan et compléments

2.2.1 Définitions

Définition 2.1. Une *matrice* A de dimension (ou d'ordre) $n \times p$ est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes.
Les nombres sont appelés *coefficients* (ou éléments) de la matrice.
Le coefficient situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est noté a_{ij} ou $a_{i,j}$. On note parfois $A = \left(a_{ij}\right)$.

Définition 2.2. Certaines matrices particulières portent des noms :
- Matrice ligne : C'est une matrice qui ne comporte qu'une ligne;
- Matrice colonne : C'est une matrice qui ne comporte qu'une colonne;
- Matrice carrée : C'est une matrice qui comporte autant de lignes que de colonnes; on dit qu'elle est d'ordre n (lorsqu'il y a n lignes et n colonnes);
- Matrice unité : C'est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la première diagonale qui sont tous égaux à 1; on note I_n la matrice unité d'ordre n;
- Matrice nulle : C'est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à zéro;

2.2.2 Égalité de deux matrices

Définition 2.3. Deux matrices $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ sont égales si elles ont même dimension et si les coefficients situés à la même place sont égaux : $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et j.

2.2.3 Addition de matrices

Définition et propriétés

Définition 2.4. La *somme de deux matrices* $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ de même dimension est la matrice $C = \left(c_{ij}\right)$ telle que les coefficients de C sont la somme des coefficients de A et de B situés à la même place : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout i et j.

Définition 2.5. La *multiplication par un réel k d'une matrice* $A = \left(a_{ij}\right)$ est la matrice notée kA obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k : $kA = \left(ka_{ij}\right)$

Théorème 2.1. *Soient A, B et C trois matrices de même dimension et k et k' deux réels. On a :*
1. *$A + B = B + A$ (on dit que l'addition des matrices est commutative);*
2. *$(A + B) + C = A + (B + C)$ (on dit que l'addition des matrices est associative);*
3. *$k(A + B) = kA + kB$;*
4. *$(k + k')A = kA + k'A$;*
5. *$k(k'A) = (kk')A$.*

Preuve.
1. $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$ et $B + A = \left(b_{ij} + a_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$
2. $(A+B)+C = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) + \left(c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\right)$ et $A+(B+C) = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij} + c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\right)$
3. $k(A+B) = k\left(a_{ij} + b_{ij}\right) = \left(k(a_{ij} + b_{ij})\right) = \left(ka_{ij} + kb_{ij}\right)$ et $kA+kB = \left(ka_{ij}\right) + \left(kb_{ij}\right) = \left(ka_{ij} + kb_{ij}\right)$
4. $(k+k')A = (k+k')\left(a_{ij}\right) = \left((k + k')a_{ij}\right) = \left(ka_{ij} + k'a_{ij}\right)$ et $kA+k'A = \left(ka_{ij}\right) + \left(k'a_{ij}\right) = \left(ka_{ij} + k'a_{ij}\right)$
5. $k(k'A) = k\left(k'a_{ij}\right) = \left(kk'a_{ij}\right)$ et $(kk')A = \left(kk'a_{ij}\right)$

$\diamondsuit$

Matrices opposées, différence de deux matrices

Définition 2.6. Deux matrices A et B sont dites opposées si elles sont de même dimension et si $A+B$ est une matrice nulle.

Propriété 2.2. *Toute matrice A a une matrice opposée : la matrice $(-1)\times A$. On la notera $-A$.*

Preuve. $A+(-1)\times A=\left(a_{ij}\right)+\left(-a_{ij}\right)=(0)$ ♢

Définition 2.7. Soient A et B deux matrices de même dimension. Alors la différence de A et B, notée $A-B$, est la matrice $A+(-B)$.

2.2.4 Multiplication de matrices

Définition et propriétés

Définition 2.8. Soient A une matrice ligne de dimension $n\times p$ et B une matrice colonne de dimension $p\times m$, telles que $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix}$. Alors le produit $A\times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension $n\times m$ telle que le premier coefficient de C est le produit de la première ligne de A par la première colonne de B, le deuxième coefficient de C est le produit de la première ligne de A par la deuxième colonne de B, et ainsi de suite.

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1p}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{1m}+a_{12}b_{2m}+\cdots+a_{1p}b_{pm} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2p}b_{p1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2p}b_{p2} & \cdots & a_{21}b_{1m}+a_{22}b_{2m}+\cdots+a_{2p}b_{pm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{np}b_{p1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{np}b_{p2} & \cdots & a_{n1}b_{1m}+a_{n2}b_{2m}+\cdots+a_{np}b_{pm} \end{pmatrix}$$

Théorème 2.3. *Soient A, B et C trois matrices telles que les opérations suivantes existent. Alors :*

1. *En général $A\times B\neq B\times A$ (on dit que la multiplication des matrices n'est pas commutative) ;*
2. *$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ (on dit que la multiplication des matrices est associative) ;*
3. *$A\times(B+C)=A\times B+A\times C$*
4. *$(A+B)\times C=A\times C+B\times C$*

On l'admettra.

Remarque. On notera $A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots A}_{n\text{ fois}}$ quand ce produit est défini.

Inverse d'une matrice

Définition 2.9. Deux matrices carrées A et B sont dites inverses si $A\times B=B\times A=I$ où I est une matrice unité. On notera alors $B=A^{-1}$ (ou $A=B^{-1}$).

Remarque. Certaines matrices n'ont pas d'inverse. Celles qui en ont un sont dites *inversibles*.

2.3 Deux applications

2.3.1 Résolutions de systèmes

Activité

Nous savons que par deux points du plan passe une unique droite.
Le plan étant muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, soient $A\,(2\,;3)$ et $B\,(4\,;6)$ deux points de ce plan et (AB) : $y = mx + p$ l'équation réduite de la droite (AB).

1. Montrer que m et p sont solutions du système : $\begin{cases} 2m+p=3 \\ 4m+p=6 \end{cases}$
2. On donne les matrices A, X et B suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.
   Calculer AX.
   En déduire une équation matricielle équivalente au système de la question 1.
3. On suppose que A est inversible et on note A^{-1} son inverse.
   Isoler la matrice des inconnues X à l'aide de A^{-1}.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer alors les valeurs de m et p.

Bilan

Propriété 2.4. *Tout système linéaire à n inconnues et n équations peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle $AX = B$ où A est une matrice carrée d'ordre n, X la matrice colonne $(n \times 1)$ des inconnues et B une matrice colonne $(n \times 1)$.*
Si A est inversible, alors le système a une unique solution qui est telle que $X = A^{-1} \times B$.

2.3.2 Graphes probabilistes

Activité

Reprenons la situation de l'activité 2.2.

Graphe Dans le langage des graphes probabilistes, les positions verticales sur le terre plein central (A, B, C et D) sont les *états* que peut prendre le promeneur et sont symbolisés par des *sommets* (points).
Le système évolue dans le temps : à chaque pas, on parle dans le cas général de *transition*, il y a une probabilité de passer d'un état à l'autre. Cette possibilité est symbolisée par une flèche entre deux états, appelée *arête*, sur laquelle on indique un *poids* correspondant à la probabilité de passer d'un état à l'autre ; on parle alors d'*arêtes orientées et pondérées*.
Pour éviter les graphes trop chargés, on ne représente que les arêtes dont les poids sont non nuls.
On obtient alors un *graphe probabiliste*.

1. Dessiner ce graphe probabiliste.
2. Quelle est la somme des poids des arêtes d'origine A ? B ? C ? D ?

Matrice On appelle *matrice de transition* du graphe probabiliste la matrice carrée $M = \left(a_{ij}\right)$ telle que a_{ij} est la probabilité de passer de l'état i à l'état j.

1. Déterminer M.
2. Quelle est la somme des coefficients de chaque ligne ?

État *L'état probabiliste P_n* dans lequel se trouve le promeneur est une matrice ligne 1×4 indiquant, au pas de rang n, la probabilité que le promeneur a de se trouver dans l'état A, B, C et D.
Si, par exemple, on obtient $P_{10} = \begin{pmatrix}0 & 0,25 & 0,5 & 0,25\end{pmatrix}$ cela signifie que les probabilités du promeneur d'être, au pas de rang 10, en A, B, C et D sont, respectivement, de 0, 0,25, 0,5 et 0,25.

1. On suppose que le promeneur démarre en A.
   (a) Quel est alors P_0 ?
   (b) Déterminer P_1, dans ce cas puis vérifier que $P_1 = P_0 \times M$ où M est la matrice de transition.
   (c) On admettra que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$:
   - $P_{n+1} = P_n \times M$
   - $P_n = P_0 \times M^n$

   Déterminer P_n pour $n = 5$, $n = 10$, puis la probabilité que le promeneur atteigne l'extrémité du terre plein central.
2. Déterminer P_n pour $n = 0$, $n = 5$, $n = 10$ et la probabilité qui atteigne l'extrémité du terre plein central dans chacun des cas suivants :
   - le promeneur démarre en B
   - le promeneur démarre en C

Bilan

Définition 2.10. Un système évoluant à intervalles réguliers entre des états où la probabilité de passer de l'état i à l'état j à chaque transition est identique peut être modélisé par un graphe probabiliste qui est un graphe tel que :
- les sommets sont les états que peut prendre un système
- pour tous sommets i et j, l'arête entre les sommets i et j est orientée de i vers j et pondérée par la probabilité de passer, à chaque transition de l'état i à l'état j.

Remarques.
- Par définition la somme des probabilité des arêtes d'origine l'état i est égale à 1
- On ne représente par les arêtes entre les sommets i et j si la probabilité de passer de l'état i à l'état j est nulle

Définition 2.11. Soit un graphe probabiliste comportant p états. La matrice de transition du système est la matrice carrée $M = \left(a_{ij}\right)$ de dimension p telle quel a_{ij} est la probabilité à chaque transition de passer de l'état i à l'état j.

Définition 2.12. Soit un graphe probabiliste comportant p états. L'état probabiliste P_n d'un système au rang n est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles au rang n. Il est représenté par une matrice ligne $1\times p$ où le coefficient de la colonne j est la probabilité que le système soit dans l'état j au rang n.

Par définition la somme des coefficients est égale à 1.
On admettra la propriété suivante :

Propriété 2.5. *Soit un graphe probabiliste comportant p états. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$ et M la matrice de transition du graphe. Alors $P_n = P_m \times M^{n-m}$*

Remarque. En particulier :
- $P_{n+1} = P_n \times M$
- $P_n = P_0 \times M^n$
- $P_n = P_1 \times M^{n-1}$

2.4 Exercices

2.4.1 Technique

EXERCICE 2.1.
Lors d'un examen, on a relevé les notes de langues vivantes LV1, LV2 et LV3 pour plusieurs élèves. Ces notes ont été placées dans la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 & 16 & 18 & 17 \\ 10 & 13 & 14 & 14 & 15 & 15 \\ 18 & 19 & 13 & 12 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'ordre de cette matrice.
2. Combien d'élèves ont passé ces épreuves ?
3. Quelle est la note obtenue en LV3 par l'élève 2 ?
4. Donner la valeur des éléments a_{11}, a_{23}, a_{33} et a_{36}.

EXERCICE 2.2.
Préciser le type de chacune des matrices suivantes :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;
- $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

EXERCICE 2.3.
On pose $A = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles $A = B$.

EXERCICE 2.4.
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $4A - 2B$.

EXERCICE 2.5.
Dans chacun des cas suivants, préciser si le produit $A \times B$ existe et, si oui, le calculer.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2.6.
Démontrer que les matrices A et B suivantes sont inverses l'une de l'autre.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2.7.
1. Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ n'admet pas d'inverse.

EXERCICE 2.8.
À l'aide de la calculatice, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si oui, donner leur inverse :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.9.
On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A \times B$. Que constate-t-on ?
2. B est-elle la matrice inverse de A ?

2.4.2 Systèmes

EXERCICE 2.10.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice inverse de A est $\begin{pmatrix} 2,5 & -2 \\ 3,5 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Soit le système $\begin{cases} 6x - 4y = 7 \\ 7x - 5y = 8 \end{cases}$.
   En utilisant la matrice A^{-1}, chercher la solution de ce système.

EXERCICE 2.11.
Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour. Elle produit deux sortes de chaises, les unes vendues 30 € pièce, les autres 60 € pièce. La production d'une journée a été totalement vendue et le montant des ventes s'élève à 7 260 €.
On note x le nombre de chaises à 30 € et y le nombre de chaises à 60 € vendues dans la journée.

1. Montrer que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 7260 \end{pmatrix}$
2. Déterminer l'inverse de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}$.
3. En déduire le nombre de chaises à 30 € et à 60 € qui ont été vendues.

EXERCICE 2.12.
Un triathlon comprend un parcours de natation, suivi d'un parcours à bicyclette, puis d'un parcours de course à pied. La distance totale est de 32 km. Le parcours de course à pied dépasse celui de natation de 8,8 km et le parcours à bicyclette est deux fois plus long que celui de course à pied.
On se propose de calculer la longueur de chacun des parcours.
On note n la longueur du parcours de natation, p celle du parcours de course à pied et b celle du parcours à bicyclette.

1. Montrer que :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 8,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet que A est inversible. Montrer que : $\begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 32 \\ 8,8 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. À l'aide de votre calcutrice, déterminer n, p et b.

EXERCICE 2.13.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Sa courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $M(1\,;0)$, $N(-1\,;-4)$ et $P(2\,;-1)$.

1. Montrer que a, b et c sont solutions du système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ a-b+c & = & -4 \\ 4a+2b+c & = & -1 \end{array}\right.$$
2. Résoudre ce système à l'aide des matrices.

EXERCICE 2.14.
Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale d'eau en m^3 utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne les résultats suivants :

Nombre de jours écoulés : x_i	1	3	5	8	10
Volume utilisé en m^3 : y_i	2,25	4,3	8	17,5	27

1. Représenter le nuage de points $\left(x_i\,;y_i\right)$.
(*Unités graphiques : abscisse 1 cm pour un jour; ordonnée 0,5 cm pour un m*^{3}).
2. Le nuage de points a une allure qui permet d'envisager une modélisation de la consommation par une parabole $\mathscr{P}$ qui aurait pour équation $y = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels.
   (a) Déterminer un système d'équation d'inconnues $(a\,;b\,;c)$ sachant qu'on veut que la parabole passe par les points $A(1\,;2,25)$, $B(5\,;8)$ et $C(10\,;27)$.
   (b) À l'aide des matrices, résoudre ce système.
   (c) Représenter alors cette parabole sur le même graphique.
   Ce modèle semble-t-il satisfaisant?
   (d) À l'aide de ce modèle, déterminer quelle serait la consommation d'eau pour l'exploitation au bout de 20 jours.

2.4.3 Graphes probabilistes

EXERCICE 2.15.
Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.
On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :
a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n;
b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n;
P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.
Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B.
   Déterminer l'état initial $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$.
2. (a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   (b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   (c) En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année 10.

EXERCICE 2.16.
Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».
Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :

- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.
Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau et 20 % reviennent au niveau A et les autres passent passent au niveau C,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A »,
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B »,
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2010+n$. Ainsi $P_0 = (0,2 \quad 0,7 \quad 0,1)$.

On se décide se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
2. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

3. (a) On suppose qu'au premier janvier 2010 tous les adhérents avaient choisi le niveau A. Déterminer P_0, P_5, P_{10} et P_{50}.
   (b) Même question en supposant qu'au premier janvier 2010 tous les adhérents avaient choisi le niveau B.
   (c) Même question en supposant qu'au premier janvier 2010 tous les adhérents avaient choisi le niveau C.
   (d) Que constate-t-on ?
   Le président de l'association affirme que 50 % des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?

2.4.4 Pour aller plus loin

EXERCICE 2.17.
On pourra effectuer tous les calculs demandés à la calculatrice.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Calculer :
   - $A \times B$;
   - $B \times A$;
   - A^2 ;
   - A^3 ;
   - B^2 ;
   - B^3.
2. Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Que constate-t-on ?

EXERCICE 2.18.
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. En déduire, par récurrence, A^n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 2.19.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire, par récurrence, A^n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 2.20.
Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité.
Calculer $J - I_3$ puis $(J - I_3)^2$ puis $(J - I_3)^3$.

EXERCICE 2.21.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire l'inverse de la matrice A.
3. On pose $B = A^2$. Déterminer l'inverse de B.

EXERCICE 2.22.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité.

1. Vérifier que A^3 est la matrice nulle.
2. Développer le produit matriciel : $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$.
3. Déduire des résultats précédents la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.23.
On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et que $A = P \times D \times P^{-1}$.
2. Calculer D^2, D^3 et D^4.
3. Expliquer pourquoi $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$, $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$ et $A^4 = P \times D^4 \times P^{-1}$