Mathématiques en Première L

David ROBERT

2015–2016

Sommaire

Devoir maison n°1

Autour de la parabole

À rendre pour le vendredi 11 septembre.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
$\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$ et A et B sont deux points distincts de la parabole $\mathscr{P}$.
On s'intéresse dans ce devoir au point C, intersection de la droite (AB) avec l'axe des ordonnées (Oy).

Partie I : Graphiquement

Dans cette partie, on pourra s'aider d'un logiciel de géométrie dynamique comme Geogebra.
On pourra fournir une impression issue du logiciel quand un schéma est demandé.

1. On suppose dans cette question que le point A est d'abscisse 2 et le point B d'abscisse -1.
   (a) Tracer la parabole et placer A et B.
   (b) Tracer la droite (AB).
   (c) Déterminer par lecture graphique l'ordonnée de C.
2. Dans cette question on fait varier les abscisses des points A et B.
   Sans justifier, reproduire sur votre copie et compléter le tableau ci-dessous :

Abscisse de A	1	-1	0	-3	4	2
Abscisse de B	3	-2	4	$0,5$	-1	3
Ordonnée de C						

   Conjecturer le lien entre les abscisses de A et de B et l'ordonnée de C.
   L'énoncer sous forme de propriété.

Partie II : Par le calcul

Dans cette partie, tous les résultats devront être justifiés par le calcul.

1. Un cas particulier.
   On suppose dans cette question que le point A est d'abscisse -3 et le point B d'abscisse $-0,5$.
   (a) Déterminer les ordonnées respectives de A et de B.
   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   (c) Déterminer par le calcul l'ordonnée de C. Ce résultat confirme-t-il votre conjecture ?
2. Cas général.
   On suppose dans cette question que le point A est d'abscisse α et le point B d'abscisse β.
   (a) Déterminer les ordonnées respectives de A et de B.
   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   (c) Déterminer par le calcul l'ordonnée de C. Conclure.

Chapitre 1

Second degré

Sommaire

1.1 Activités

ACTIVITÉ 1.1.
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement : $f(x) = 2x^2 - x - 1$ et $g(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = g(x)$.
2. En déduire l'extremum de f.
3. En déduire les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. En déduire le signe de f selon les valeurs de x

On vient de voir, sur un exemple, que lorsqu'une fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est écrite sous la forme $f(x) = \alpha(x-\beta)^2 + \gamma$, appelée forme canonique (on admettra qu'une telle forme existe toujours), alors il est plus facile d'en étudier les caractéristiques. En Seconde, cette seconde forme était toujours donnée, en Première nous allons apprendre à la trouver, c'est-à-dire à trouver α, β et γ à partir de a, b et c.

ACTIVITÉ 1.2 (Cas général)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels, avec $a \neq 0$ et α, β et γ trois réels tels qu'on a aussi $f(x) = \alpha(x-\beta)^2 + \gamma$.

1. Développer $\alpha(x-\beta)^2 + \gamma$.
2. On admet que deux fonctions trinômes $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et $g : x \mapsto a'x^2 + b'x + c'$ sont égales pour tout $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.
   En déduire a, b et c en fonction de α, β et γ.
3. En déduire α, β et γ en fonction de a, b et c.
4. Application : on donne $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer la forme canonique de f
   (b) En déduire l'extremum de f.
   (c) En déduire les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   (d) En déduire le signe de f selon les valeurs de x

1.2 Trinôme

1.2.1 Définition, forme développée

Définition 1.1. On appelle *trinôme* toute expression qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. Cette forme s'appelle la *forme développée* du trinôme.

1.2.2 Forme canonique

Théorème 1.1. *Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $\alpha(x-\beta)^2 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

Preuve. L'activité 1.2 a montré que $\alpha = a$, $\beta = -\frac{b}{2a}$ et $\gamma = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. ◇

Remarque. Pour alléger les écritures, et parce que cette quantité aura un rôle important plus tard, on notera : $\Delta = b^2 - 4ac$.

La forme canonique devient alors :

Propriété 1.2. *Si $a \neq 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$.*

1.2.3 Racines et discriminant

Définitions 1.2. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$. On appelle :

- *racine* du trinôme tout réel solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;
- *discriminant* du trinôme, noté Δ, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 1.3. *Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.*

- *Si $\Delta < 0$, alors le trinôme **n'a pas de racine**.*
- *Si $\Delta = 0$, alors le trinôme a **une unique racine** : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta > 0$, alors le trinôme a **deux racines** : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$*

Preuve. La preuve sera faite en classe. ◇

Remarques.
- Le signe de Δ permet de *discriminer*[1] les équations de type $ax^2 + bx + c = 0$ qui ont zéro, une ou deux solutions, c'est la raison pour laquelle on l'appelle le *discriminant.*
- Si $\Delta = 0$ les formules permettant d'obtenir x_1 et x_2 donnent $x_1 = x_0$ et $x_2 = x_0$; pour cette raison, on appelle parfois x_0 la *racine double* du trinôme.

1.2.4 Forme factorisée, signe d'un trinôme

Propriété 1.4. *Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme.*
- *Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2 alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.*
- *Si le trinôme a une racine x_0 alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_0) = a(x - x_0)^2$.*
- *Si le trinôme n'a pas de racine, une telle factorisation est impossible.*

Cette écriture, lorsqu'elle existe, est appelée forme factorisée *du trinôme.*

Preuve. On a obtenu les formes factorisées dans la démonstration précédente. ♢

Propriété. *Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme.*
- *Si le trinôme n'a pas de racine, $ax^2 + bx + c$ est strictement du signe de a pour tout x.*
- *Si le trinôme a une racine, $ax^2 + bx + c$ est strictement du signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$ et s'annule quand $x = -\frac{b}{2a}$.*
- *Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2, $ax^2 + bx + c$ est :*
  - *strictement du signe de a quand $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$;*
  - *strictement du signe opposé de a quand $x \in]x_1; x_2[$;*
  - *s'annule en x_1 et en x_2.*

On peut aussi énoncer cette propriété de la façon synthétique suivante :

Propriété 1.5. *Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les racines, si elles existent.*

Preuve. La preuve sera faite en classe. ♢

1.3 Fonction trinôme

1.3.1 Définition

Définition 1.3. On appelle *fonction trinôme* une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui à x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

1.3.2 Sens de variation

Propriété 1.6. *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :*
- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

- *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$

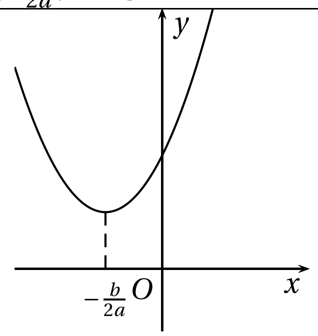
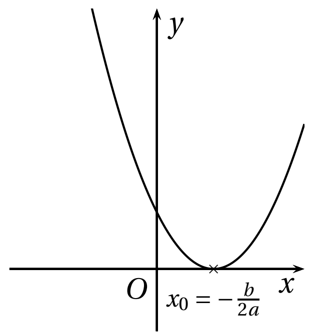
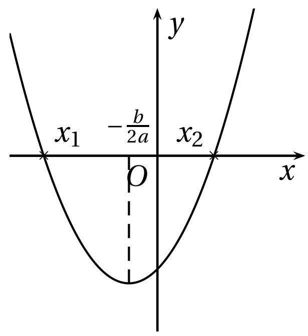
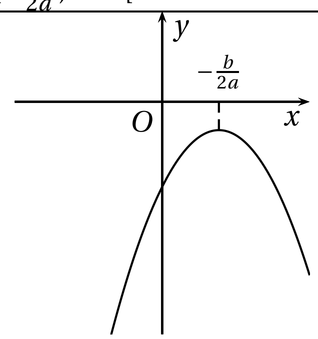
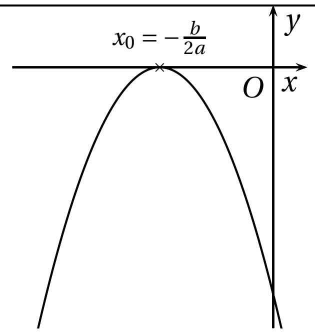
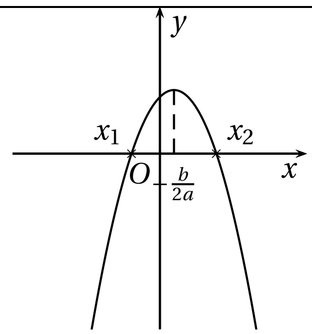
Preuve. Voir l'exercice 1.1 page 7. ♢

1. Discriminer. *v. tr.* Faire la discrimination, c'est-à-dire l'action de distinguer l'un de l'autre deux objets, ici des équations

1.4 Bilan

Le tableau 1.1 de la présente page résume les choses à retenir sur le chapitre.

TABLE 1.1: Bilan du second degré

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td colspan="3">$\Delta = b^2 - 4ac$</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c=0$ a une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>$ax^2+bx+c=0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c n'a pas de racine</td><td>ax^2+bx+c a une racine double</td><td>ax^2+bx+c a deux racines</td></tr>
<tr><td>Aucune factorisation</td><td>$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$</td><td>$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Si $a > 0$</td><td colspan="3">$x \mapsto ax^2+bx+c$ est décroissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ et croissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c > 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \geqslant 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $ax^2+bx+c \leqslant 0$ sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Si $a < 0$</td><td colspan="3">$x \mapsto ax^2+bx+c$ est croissante sur $]-\infty; -\frac{b}{2a}]$ et décroissante sur $[-\frac{b}{2a}; +\infty[$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c < 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \leqslant 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $ax^2+bx+c \geqslant 0$ sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
</table>

1.5 Exercices et problèmes

1.5.1 Démonstration(s)

EXERCICE 1.1.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ où $a \neq 0$. Dans chacun des cas suivants, compléter :

1. $a > 0$ et $x_1 < x_2 \leqslant -\frac{b}{2a}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\ldots\ldots & \ldots\ldots & x_1 & < & x_2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & x_1+\frac{b}{2a} & \ldots\ldots & x_2+\frac{b}{2a} & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} & \ldots\ldots & a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & f(x_1) & \ldots\ldots & f(x_2) & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Donc f est .... sur ....

2. $a > 0$ et $-\frac{b}{2a} \leqslant x_1 < x_2$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\ldots\ldots & \ldots\ldots & x_1 & < & x_2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & x_1+\frac{b}{2a} & \ldots\ldots & x_2+\frac{b}{2a} & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} & \ldots\ldots & a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & f(x_1) & \ldots\ldots & f(x_2) & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Donc f est .... sur ....

3. $a < 0$ et $x_1 < x_2 \leqslant -\frac{b}{2a}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\ldots\ldots & \ldots\ldots & x_1 & < & x_2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & x_1+\frac{b}{2a} & \ldots\ldots & x_2+\frac{b}{2a} & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} & \ldots\ldots & a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & f(x_1) & \ldots\ldots & f(x_2) & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Donc f est .... sur ....

4. $a < 0$ et $-\frac{b}{2a} \leqslant x_1 < x_2$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\ldots\ldots & \ldots\ldots & x_1 & < & x_2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & x_1+\frac{b}{2a} & \ldots\ldots & x_2+\frac{b}{2a} & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} & \ldots\ldots & a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & f(x_1) & \ldots\ldots & f(x_2) & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

Donc f est .... sur ....

EXERCICE 1.2.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$.

1. Montrer que si a et c sont de signes opposés alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.
2. Peut-on affirmer que si l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions alors a et c sont de signes opposés ?

1.5.2 Technique

EXERCICE 1.3.
Résoudre dans $\mathbb{R}$, sans utiliser les propriétés des trinômes, les équations suivantes :

- $x^2 = 9$;
- $x^2 = -3$;
- $(x-5)^2 = 3$;
- $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$;
- $(3x+5)^2 = (x+1)^2$;
- $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$.

EXERCICE 1.4.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $4x^2 - x - 3 = 0$;
- $(t+1)^2 + 3 = 0$;
- $x^2 + 10^{50}x + 25 \times 10^{98} = 0$;
- $x^2 + 3x = 0$;
- $4x^2 - 9 = 0$;
- $x^2 + 9 = 0$;
- $x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$;
- $x^3 + 2x^2 - 4x = 0$
- $2(2x+1)^2 - (2x+1) - 6 = 0$.

EXERCICE 1.5.
On note $P(x) = -2x^2 - x + 1$.

1. Résoudre $P(x) = 0$.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Résoudre $P(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 1.6.
Pour les fonctions données ci-après et définies sur $\mathbb{R}$:

- Déterminer les éventuelles valeurs de x pour lesquelles la fonction s'annule.
- Donner le signe de la fonction selon les valeurs de x.

1. $f(x) = x^2 + x + 1$
2. $g(x) = -x^2 - x + 1$
3. $h(x) = x^2 - x - 2$
4. $i(x) = -x^2 + 2x - 1$
5. $j(x) = -x^2 + 2x - 2$

EXERCICE 1.7.
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$
- $\frac{x^2-x+1}{x+2} = 2x+3$
- $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$;
- $-x^2 + 9x + 22 \geqslant 0$;
- $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} > 0$.
- $\frac{x^2-3x+2}{-x^2+2x+3} \geqslant 0$

1.5.3 Algorithmique

EXERCICE 1.8.
Les algorithmes à écrire suivants prennent tous comme arguments trois réels a, b et c avec $a \neq 0$.

1. Écrire un algorithme renvoyant la valeur du discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
2. Écrire un algorithme renvoyant le signe du discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
3. Écrire un algorithme renvoyant le nombre de racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.
4. Écrire un algorithme renvoyant le nombre de racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ et la valeur de ces racines, le cas échéant.
5. Écrire un algorithme renvoyant le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ suivant les valeurs de x.

1.5.4 Technologie

EXERCICE 1.9.
Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 13x + 15$.

1. Montrer que $x = -1$ est racine de ce polynôme.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.
3. (a) Terminer la factorisation de $f(x)$.
   (b) Résolvez l'inéquation $f(x) > 0$.

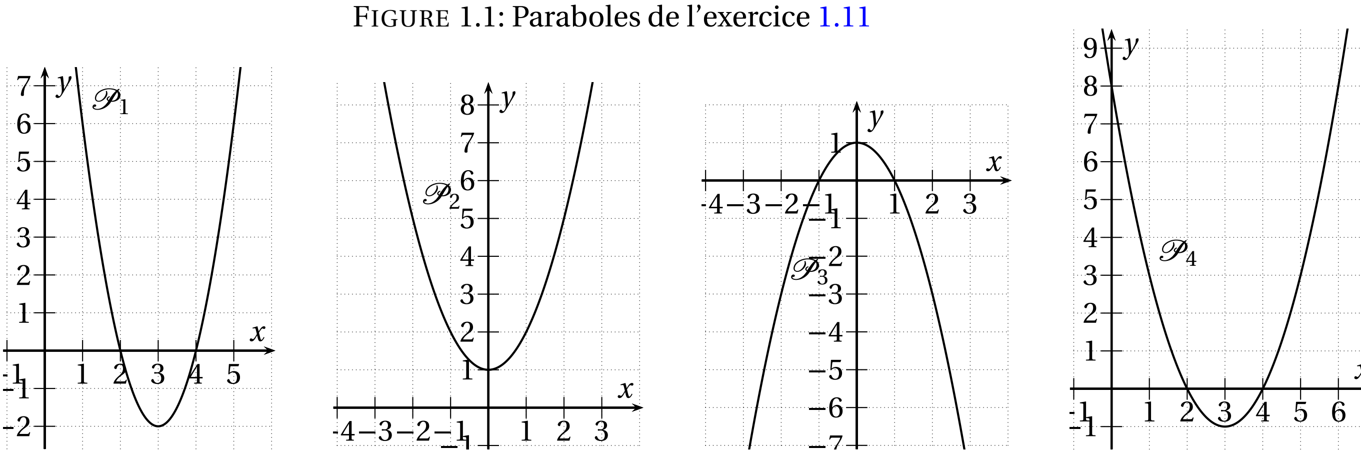
EXERCICE 1.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Précisez la nature de la courbe $\mathscr{C}$ et les coordonnées de son sommet S.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en un point dont on précisera les coordonnées.
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
4. Pour quelles valeurs de x la courbe $\mathscr{C}$ est-elle situé au dessus de l'axe des abscisses ?

EXERCICE 1.11.
Voici quatre équations :
1. $y = x^2 - 6x + 8$ 2. $y = 2(x-2)(x-4)$ 3. $y = x^2 + 1$ 4. $y = 1 - x^2$

La figure 1.1 de la présente page propose quatre paraboles.
Retrouver l'équation de chacune de ces paraboles en justifiant.

FIGURE 1.1: Paraboles de l'exercice 1.11



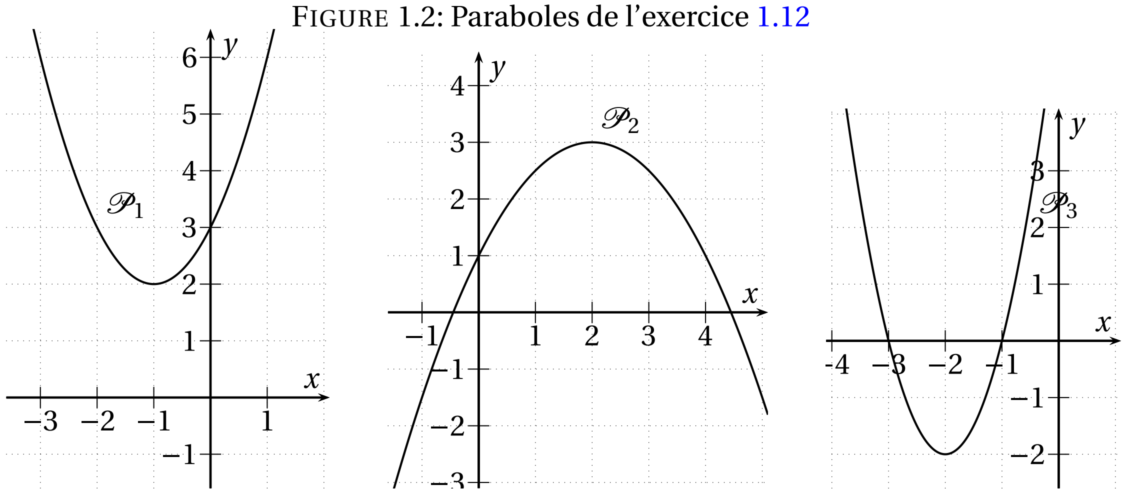
EXERCICE 1.12.
Chacune des trois paraboles de la figure 1.2 page suivante est la représentation graphique d'une fonction trinôme. Déterminer l'expression de chacune de ces fonctions.

EXERCICE 1.13.
On donne, définies sur $\mathbb{R}$, les fonctions $f(x) = x^2 + x - 1$ et $g(x) = x + 3$.

1. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection des courbes de f et de g.
2. Déterminer les positions relatives des courbes de f et de g c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles la courbe de f et au-dessus de celle de g et réciproquement.

EXERCICE 1.14.
Mêmes questions que l'exercice précedent avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

FIGURE 1.2: Paraboles de l'exercice 1.12



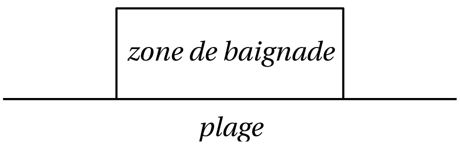
1.5.5 Problèmes

PROBLÈME 1.1.
Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
La tonne est vendue 120 € et le coût de fabrication de q tonnes de farine est donné, en €, par $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$.

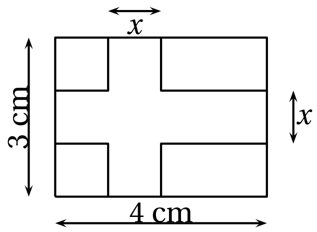
1. Déterminer la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable.
2. Déterminer la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

PROBLÈME 1.2.
Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

PROBLÈME 1.3.
Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?

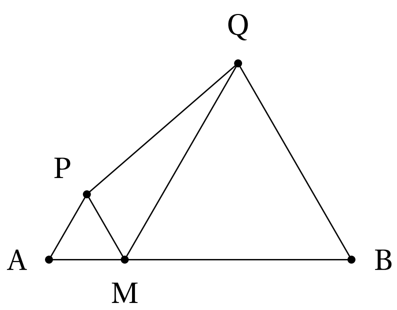


PROBLÈME 1.4.
Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?



PROBLÈME 1.5.
A et B sont deux points du plan tels que $AB = 1$. M est un point du segment $[AB]$. On construit dans le même demi-plan les points P et Q tels que AMP et MBQ sont des triangles équilatéraux.

1. Déterminer la position de M qui rend maximale l'aire du triangle MPQ.
2. Expliquer pourquoi cette position rend minimale l'aire du quadrilatère $ABQP$.



PROBLÈME 1.6.
$\mathscr{D}$ est une droite quelconque du plan et F un point du plan n'appartenant pas à $\mathscr{D}$. On cherche à déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$ des points du plans situés à égale distance de la droite $\mathscr{D}$ et du point F.
On admet que la distance d d'un point M à une droite $\mathscr{D}$ est la longueur HM où H est le pied de la perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M.

Partie A : Découvrir à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique
À l'aide du logiciel Geogebra :

- Créer une droite (AB) et un point F n'appartenant pas à (AB).
- Créer un curseur nommé d allant de 0 à 20 avec des incréments de 0,1.
- Construire l'ensemble des points situés à la distance d de la droite (AB) dans le même demi-plan que F.
- Construire l'ensemble des points situés à la distance d du point F.
- Jouer avec le curseur jusqu'à trouver des points situés à égale distance de (AB) et de F.
- Créer ces points, activer le mode tracer pour ces points et conjecturer l'allure de cet ensemble de points en jouant avec le curseur d. Nous allons démontrer que cette conjecture est vraie.

Partie B : Démontrer
Dans le dessin précédent, on peut toujours se placer dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ suivant : O est le point de la droite (AB) tel que $(OF)\perp(AB)$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = OF$.

1. Quelle est l'équation de la droite (AB) dans ce repère ?
2. Quelles sont les coordonnées de F dans ce repère ?
3. Observons un point $M(x; y)$ situé à égale distance de la droite (AB) et du point F.
   (a) Exprimer la distance de ce point à la droite (AB) en fonction de x et y.
   (b) Exprimer la distance de ce point au point F en fonction de x et y.
   (c) Montrer que ces deux distances sont égales si et seulement si M appartient à une courbe dont on précisera l'équation.
   Préciser alors la nature de cette courbe.

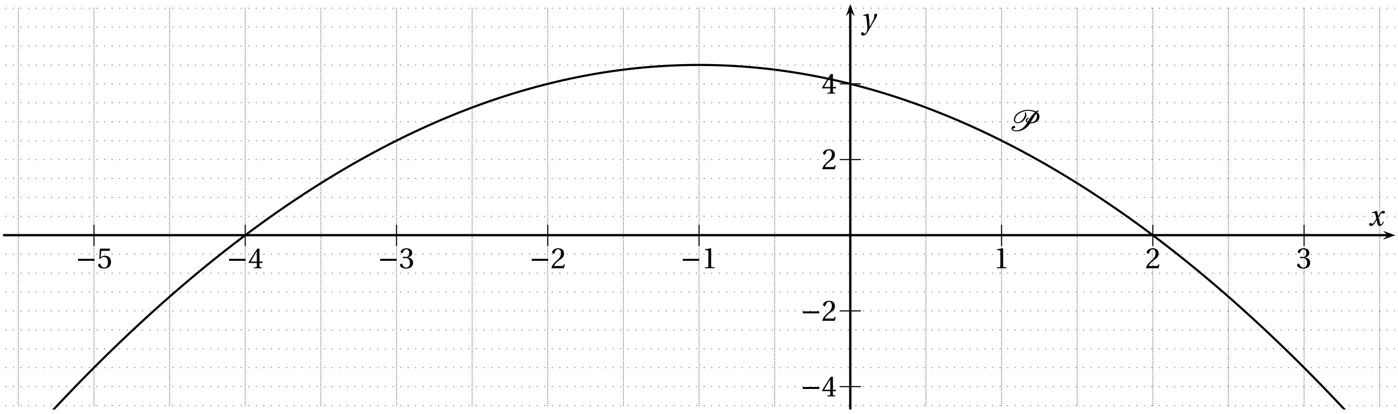
Devoir surveillé n°1

Second degré

EXERCICE 1.1 (7,5 points)**.**
Les questions sont indépendantes.

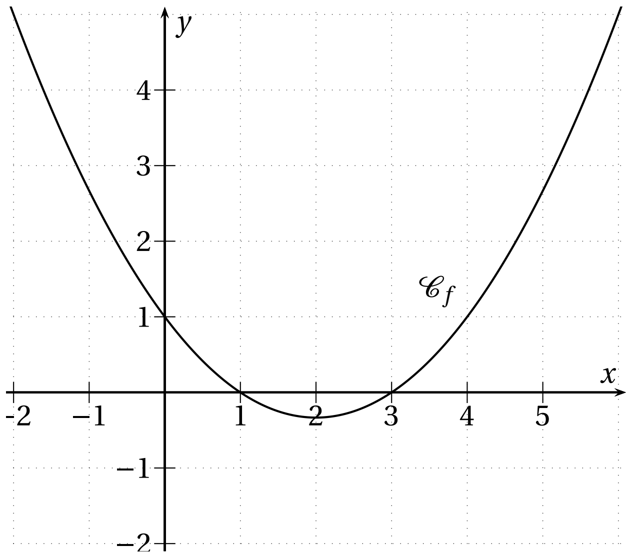
1. On donne $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
2. Factoriser le polynôme : $P(x) = -x^2 + 3x - 2$.
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2 - 4x + 1 = 0$.
   (b) Déterminer, selon les valeurs de x, le signe de $-3x^2 + 4x$.
   (c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'inéquation : $\dfrac{4x^2 - 4x + 1}{-3x^2 + 4x} \geqslant 0$.

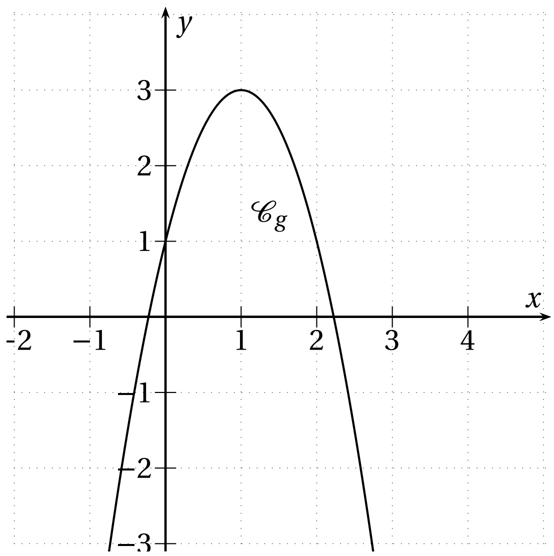
EXERCICE 1.2 (4 points)**.**
f est une fonction trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$. On appelle Δ son discriminant.
Sa courbe $\mathscr{P}$ est proposée sur la figure ci-dessous.



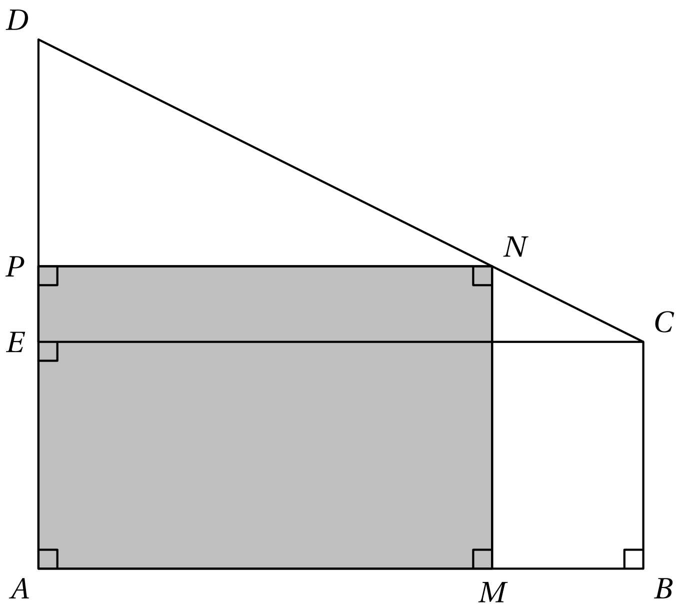
1. Dans chacun des cas suivants, donner le nom de la forme proposée :
   - $f(x) = ax^2 + bx + c$? ....
   - $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ ....
   - $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$? ....
2. Sur la courbe représentative $\mathscr{P}$ de f ci-dessus, **placer les réels** x_1, x_2, α et β et donner leur valeur.
   $x_1 =$ .... $x_2 =$ .... $\alpha =$ .... $\beta =$ ....
3. En justifiant à l'aide d'éléments graphiques, déterminer le signe de a et celui de Δ.
   ....
   ....
   ....

EXERCICE 1.3 (4 points).
Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ci-dessous sont des paraboles représentatives des fonctions trinômes f et g.
Déterminer une expression algébrique de f et une expression algébrique de g en justifiant.





EXERCICE 1.4 (4,5 points).
On souhaite poser des panneaux solaires sur un toit qui a la forme d'un trapèze rectangle représenté ci-dessous par le quadrilatère $ABCD$.
Les panneaux solaires occuperaient le rectangle $MAPN$ avec $P \in [DE]$.



On donne : $AB = 8$ m, $AD = 7$ m et $CB = 3$ m.
On note x la longueur AP en m et $\mathscr{A}(x)$ l'aire du rectangle $MAPN$ en m^2.

1. Montrer que $PN = 14 - 2x$.
   Penser à THALÈS...
2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle $MAPN$ en fonction de x.
   Justifier pourquoi la fonction $\mathscr{A}$ est définie sur $[3\,;7]$.
3. Comment doit être x pour que $\mathscr{A}(x) \geqslant 24$ m^2 ?
4. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(x)$ est maximale et déterminer cette valeur maximale.

Chapitre 2

Pourcentages

Sommaire

2.1 Activités

ACTIVITÉ 2.1.
Il y a 16 garçons dans une classe de 26 élèves. Quel est le pourcentage des garçons dans cette classe ?

ACTIVITÉ 2.2.
Au 1er janvier 2 000, trois villes ont une population de 25 000 habitants.

1. *Ville 1*
   (a) La population de la première ville augmente de 6 % en 2 000, en 2 001 et en 2 002.
   En déduire sa population au 1er janvier 2 003.
   (b) Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée :
      i. entre le 1er janvier 2 000 et le 1er janvier 2 001 ?
      ii. entre le 1er janvier 2 001 et le 1er janvier 2 002 ?
      iii. entre le 1er janvier 2 002 et le 1er janvier 2 003 ?

   Ce nombre s'appelle le *coefficient multiplicateur* correspondant à une augmentation de 6 %.
   (c) Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée entre le 1er janvier 2 000 et le 1er janvier 2 003 ?
   À quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?
2. *Ville 2*
   Le 31 décembre 2 000, la deuxième ville a une population de 26 400 habitants.
   Calculer le coefficient multiplicateur correspondant et en déduire le pourcentage d'augmentation.

3. *Ville 3*
La population de la troisième ville diminue de 6 % durant l'année 2 000.
   (a) Calculer sa population à la fin 2 000, puis le coefficient multiplicateur correspondant.
   (b) Si la population augmente de 6 % l'année suivante, calculer sa population à la fin 2 001. En déduire le pourcentage global d'évolution sur les deux années de début 2 000 à fin 2 001.

2.2 Bilan et compléments

2.2.1 Pourcentage

Définition 2.1. Soit p et q deux réels où $q \neq 0$. Dire que p est égal à t % de q signifie que $\frac{p}{q} = \frac{t}{100}$.
t est appelé *le taux.*

Exemple. Dans l'activité on cherchait quel pourcentage (t) représentaient les 16 garçons (p) parmi 26 élèves (q). On a alors $\frac{16}{26} = \frac{t}{100}$ donc $t = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \times \dots\dots \approx \dots\dots$

Propriété 2.1. *Si p est égal à t % de q (où $q \neq 0$), alors $p = q \times \frac{t}{100}$*

Preuve. Si $q \neq 0$ alors $\frac{p}{q} = \frac{t}{100} \Leftrightarrow p = q \times \frac{t}{100}$. ◇

2.2.2 Évolutions en pourcentage

Définition 2.2. Dire qu'une quantité Q évolue de t %, où t est un réel quelconque, signifie que Q :
- augmente de t % si t est positif ;
- diminue de $|t|$ % si t est négatif.

Propriété 2.2. *Faire évoluer une quantité Q de t % revient à la multiplier Q par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.*
$k = \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ *est appelé* coefficient multiplicateur *correspondant à une évolution de t %.*

Preuve. Soit Q la valeur de la grandeur avant l'évolution et Q' celle après l'évolution.
- Dans le cas d'une augmentation de t % où t est positif, c'est-à-dire dans le cas d'une évolution de t %, on a :
  $Q' = Q + Q \times \frac{t}{100} = Q \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
- Dans le cas d'une diminution de t % où t est positif, c'est-à-dire dans le cas d'une évolution de $-t$ %, on a :
  $Q' = Q - Q \times \frac{t}{100} = Q \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) = Q \times \left(1 + \frac{-t}{100}\right)$.

◇

Propriété 2.3. *Le* taux d'évolution *t d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par : $t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$.*
Le coefficient multiplicateur *k d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par : $k = \frac{V_F}{V_I}$.*
On a de plus $t = (k-1) \times 100$.

Preuve.
- $V_F = V_I \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow V_F = V_I + V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow V_F - V_I = V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$.
- On a vu que $V_F = V_I \times k$ donc $k = \frac{V_F}{V_I}$.
- Par définition $k = 1 + \frac{t}{100} \Leftrightarrow k - 1 = \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = (k-1) \times 100$.

◇

2.3 Exercices

2.3.1 Techniques de base

EXERCICE 2.1.

1. Un lycéen a travaillé pendant les vacances. Sur sa feuille de paye est inscrit :
   - Salaire brut : 1 200,00 €
   - Retenue Sécurité Sociale : 151,20 €

   Quel pourcentage du salaire brut, la retenue représente-t-elle ?
2. En 2 004, la population active française comptait 27 455 000 individus, dont 12 680 000 femmes. Quel pourcentage de la population active représentaient les femmes ?
3. 28 % de la surface du territoire français, ce qui représente environ 154 000 km^2, est constitué de terrain boisé (forêts, etc.). Quelle est la surface totale du territoire français ?
4. Lors de l'achat d'un article coûtant 1 625 €, je dois verser un acompte de 130 €. Quel pourcentage de la somme totale cet acompte représente-t-il ?
5. Lors de l'achat d'un autre article, je dois verser un acompte de 15 %, et il me restera alors à débourser 1 700 €. Quel est le prix de cet article ?
6. (a) Dans la commune de Vachelle, sur 1 742 votants, 42 % ont choisi le candidat DESIRE. Combien cela fait-il de voix ?

   (b) M. DESIRE a obtenu 428 voix sur 1 312 votants à Port-Blanc et 323 voix sur 918 votants à Saint-André. Où a-t-il fait le meilleur score en pourcentage ?

EXERCICE 2.2.
Le tableau ci-dessous donne la répartition des filles dans trois classes de Première ES d'un Lycée.

Classe	A	B	C
Filles	10	8	9
Élèves	40	20	18

Déterminer la proportion de filles dans chacune des classes. Que constate-t-on ?

EXERCICE 2.3.

1. Une personne passe une petite annonce dans un journal diffusé dans 18 % des foyers d'un département. Elle passe aussi cette annonce dans un autre journal diffusé, lui, dans 25 % des foyers du département. À quelle condition cette personne peut-elle espérer que son annonce touche 43 % des foyers du département ? Pourquoi ?
2. Vrai ou faux ? Dans une entreprise 21 % des employés a moins de 25 ans et 36 % a plus de 45 ans ; donc 43 % du personnel de cette entreprise a entre 25 et 45 ans.
3. Dans cette entreprise, 40 % des employés ont suivi le stage de formation en comptabilité, tandis que 48 % ont suivi le stage d'anglais. Sachant que 35 % des employés ont suivi ces deux stages, quel pourcentage des employés de l'entreprise peut prétendre avoir suivi au moins l'un des deux stages ?
4. Vrai ou faux ? Dans cette même entreprise, 18 % des employés (hommes) a une ancienneté inférieure à 5 ans, tout comme 22 % des employées (femmes). Donc 40 % des employés de l'entreprise a une ancienneté inférieure à 5 ans.

2.3.2 Changement d'ensemble de référence

EXERCICE 2.4.
Dans un établissement scolaire, il y a 30 % de garçons et 30 % des filles sont internes. Sachant que le pourcentage d'internes dans l'établissement est de 27 %, quel est le pourcentage de garçons internes ?

EXERCICE 2.5.
Il y a 800 élèves au Lycée JACQUES CARTIER. dans ce Lycée :
- 15 % des élèves de Lycée sont des filles de Première ;
- 48 % des élèves de Première sont des filles ;
- 25 % des filles du Lycée sont en Première.

1. Calculer l'effectif des filles de Première.
2. En déduire l'effectif des élèves de Première, puis des filles dans ce Lycée.
3. Compléter le tableau des effectifs :

	Fille	Garçon	Total
Première			
Autres			
Total			

4. Calculer le pourcentage d'élèves de Première dans ce Lycée.

EXERCICE 2.6.
Dans une entreprise, 70 % des salariés sont des hommes, 6 % des femmes sont cadres et 4 % des hommes sont cadres.

1. Quel est le pourcentage des cadres dans cette entreprise ?
2. Faire un tableau, en pourcentages de salariés de l'entreprise, résumant la situation.
3. L'entreprise compte 23 cadres. Quel est le nombre total de salariés ?
4. Faire un tableau, en nombres de salariés de l'entreprise, résumant la situation.

EXERCICE 2.7.
1. Un Lycée compte 1 250 élèves ; 26 % d'entre eux sont en classe de Première et 24 % des élèves de Première sont en Première ES.
   (a) Quel calcul doit-on effectuer pour déterminer le nombre d'élèves de Première du Lycée ?
   (b) Quel calcul doit-on faire pour déterminer le nombre d'élèves en Première ES dans ce Lycée ?
   (c) Combien y a-t-il d'élèves en Première ES dans ce Lycée ? Quel pourcentage cela représente-t-il vis-à-vis de l'ensemble des lycéens ?
   (d) Quel calcul aurait-on pu faire directement pour déterminer ce pourcentage ?
2. 75 % des foyers d'un pays ont une connexion Internet, dont 80 % de type ADSL. Quel est le pourcentage de foyers équipés d'une connexion ADSL dans ce pays ?
3. Dans une population, 65 % des individus partent en vacances et 20 % de ceux qui partent en vacances vont à la montagne. Quelle est la proportion de départs à la montagne dans cette population ?

EXERCICE 2.8.
1. Considérons les statistiques (fictives) suivantes :
   - en janvier 2 004 : 2 183 500 chômeurs, dont 624 200 jeunes (moins de 25 ans) ;
   - en janvier 2 005 : 2 008 700 chômeurs, dont 617 400 jeunes.

   Le nombre de chômeurs a-t-il diminué ? Le nombre de jeunes chômeurs a-t-il diminué ? Le pourcentage de jeunes chômeurs parmi l'ensemble des chômeurs a-t-il diminué ?
2. Voici les chiffres d'affaires d'une entreprise (fictive) pendant quatre ans :

Année	1 997	1 998	1 999	2 000
CA (en millions d'€)	35	38	41	44

   (a) De combien de millions d'euros, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?
   (b) De combien de millions d'euros en pourcentage, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?

2.3.3 Pourcentage d'évolution

EXERCICE 2.9. 1. Calculer les coefficients multiplicateurs dans chacun des cas suivants :

- hausse de 20 % ;
- hausse de 0,1 % ;
- hausse de 100 % ;
- hausse de 300 % ;
- baisse de 15 % ;
- baisse de 5,2 % ;
- baisse de 85 % ;
- baisse de 100 %.

2. Donner les pourcentages de hausse ou de baisse associés aux coefficients multiplicateurs suivants :
   - 1,25 ;
   - 3 ;
   - 1,0049 ;
   - 0,5 ;
   - 0,98 ;
   - 1,001 ;
   - 1,0101 ;
   - 0,999 ;
   - 1,175 ;
   - 1,01 ;
   - 0,875 ;
   - 0,1.
3. Donner le pourcentage d'évolution pour une grandeur qui passe :
   - de 12 540 à 13 620 ;
   - de 5,7 à 2,6 ;
   - 21 000 à 84 000.

EXERCICE 2.10. 1. En août un loyer était de 564 €. Un an plus tard il est de 589 €. Quelle est son évolution en pourcentage ?

2. Le chiffre d'affaire d'une entreprise en 2 004 était de 124 000 €. En 2 005, les prévisions donnent un chiffre d'affaire de 117 000 €seulement. Quelle est son évolution en pourcentage ?
3. Pour un même produit, le magasin A propose 20 % de produit en plus pour la même prix et le magasin B propose 20 % de remise sur le prix pour une même quantité.
   Si 1 Kg de produit coûte 100 euros, quelle est la proposition la plus avantageuse pour le client ?
4. Après une augmentation de 15 %, un produit coûte 89,70 €. Quel était son prix initial ?

EXERCICE 2.11.
Dire que la TVA est de 19,6 % revient à dire que le prix hors taxe (HT) a été augmenté de 19,6 % de TVA pour obtenir le prix toutes taxes comprises (TTC).

1. Par quel nombre doit-on multiplier le prix HT pour obtenir le prix TTC ?
2. Un article vaut 120 € HT. Combien va-t-on le payer en magasin ?
3. Vous payez un article en magasin (donc TTC) à 200 €. À combien s'élève le prix HT et la TVA en € ?
4. Laquelle de ces deux propositions est la plus avantageuse :
   - Proposition 1 : Faire une remise de 10 % sur le prix HT, puis appliquer la TVA.
   - Proposition 2 : Appliquer la TVA, puis faire une remise de 10 % sur le prix TTC.

EXERCICE 2.12. 1. Au moment des soldes, un magasin propose une baisse de 10 % sur un article, suivie d'une nouvelle baisse de 20 % sur ce même article.
Ces deux diminutions peuvent être remplacées par une diminution unique. Déterminer le pourcentage de cette diminution.

2. Le prix d'un article augmente de 22 % puis diminue de 15 %. Quel est le pourcentage d'évolution de cet article ?
3. Le prix d'un produit subit successivement une hausse de 12 %, une baisse de 5 %, une baisse de 8 % et une hausse de 2 %. Quel est le pourcentage de variation final.
4. Si le nombre de chômeurs dans une ville diminue de 2 % par mois pendant un an, quel sera le pourcentage de diminution du nombre de chômeurs sur l'année ?
5. Un client veut acheter un véhicule qui coûtait 17 000 € le mois dernier mais qui, depuis, a augmenté de 4 %. Le vendeur consent une remise de 3,85 %. Le modèle coûte-t-il plus ou moins de 17 000 € ?

EXERCICE 2.13. 1. Après une augmentation de 5 % suivie d'une hausse de t %, on obtient une hausse globale de 17,6 %. Combien vaut t ?

2. À la bourse de Paris, l'action Renault :
   - a augmenté de 1,45 % entre le 10 juin 2 000 et le 11 juin 2 000 ;
   - a baissé de 0,5 % entre le 10 juin 2 000 et le 12 juin 2 000.

   Quelle a été son évolution entre le 11 juin 2 000 et le 12 juin 2 000 ?
3. Après deux augmentation successives de t % le prix d'un produit a globalement augmenté de 20 %. Combien vaut t ?
4. Après une augmentation de t % suivie d'une baisse de t %, on obtient une baisse globale de 4 %. Combien vaut t ?
5. Un article subit une augmentation de 10 %. Quel pourcentage de baisse doit-on appliquer pour compenser cette hausse ?

EXERCICE 2.14. 1. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 2 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 6 % ?

2. Est-il pertinent de dire qu'une hausse de 1 % suivie d'une baisse de 3 % suivie d'une hausse de 2% sont approximativement équivalentes à une évolution globale de 0 % ?
3. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 20 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globales de 60 % ?

2.3.4 Indices

Les indices sont essentiellement utilisés dans des séries chronologies.
La valeur d'une grandeur observée une année ou un mois sert de référence (indice 100) et toutes les autres données (antérieures ou ultérieures) sont exprimées sous forme de pourcentage par rapport à cette année de référence.
Indices et grandeurs sont alors proportionnels.
Les indices sont particulièrement utiles pour comparer des évolutions de deux grandeurs quand les grandeurs ne sont pas du même ordre ou n'ont pas les mêmes unités (comparer PIB et population par exemple).

EXERCICE 2.15.
On veut connaître l'évolution du PIB par habitant en France depuis 1 990 qui servira d'année de référence.
On dispose du tableau suivant qu'on complètera au fur et à mesure par les réponses aux questions :

Année	1 990	1 991	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
PIB (en $)	1 195	1 201	1 322	1 250	1 331	1 535	1 554	1 406	1 447	1 432
Indice										

1. Calculer l'indice des années 1 991, 1 995, 1 996 et 1 999 (arrondis à 0,1).
2. En déduire le pourcentage d'évolution du PIB par habitant entre :
   - 1 990 et 1 991 ;
   - 1 990 et 1 995 ;
   - 1 990 et 1 999 ;
3. Quel est le pourcentage d'évolution du PIB par habitant entre 1 994 et 1 999 ?
4. Quelle est l'unité de l'indice ?

EXERCICE 2.16.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix à la consommation en France entre 1 998 et 2 004 en prenant pour année de base l'année 1 998 (indice 100) (*source : INSEE*) :

Année	1 998	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Indice	100	100,5	102	103,5	105,6	107,6	109,3

1. Donner l'évolution globale des prix consommés par les ménages entre :

- 1 998 et 1 999 ?
- 1 998 et 2 001 ?
- 1 998 et 2 004 ?
- 2 000 et 2 002 ?
- 2 000 et 2 004 ?

2. Reconstruire un tableau donnant l'évolution de l'indice des prix entre 2 000 et 2 004, en prenant 2 000 comme année de référence (indice 100).

EXERCICE 2.17.
Le tableau suivant indique l'évolution du PIB base 100 en 1 980 aux États-Unis (EU), au Japon et dans l'Union Européenne (UE) :

Année	1 980	1 990	1 999
EU	100	132,6	172,3
Japon	100	155,2	166,0
UE	100	126,8	146,8

1. Donner le pourcentage d'évolution du PIB aux EU entre 1 980 et 1 990 puis entre 1 980 et 1 999. Faire de même pour le PIB du Japon et dans l'UE.
2. Pour les EU, calculer l'indice du PIB en 1 999 base 100 en 1 990. faire de même pour le Japon et l'UE (valeurs arrondies à 0,1 près).
3. Si le PIB aux EU était de 5 554 milliards de dollars en 1 990, calculer le PIB en 1 980 et en 1 999 (valeurs arrondies au milliard de dollars).
4. Peut-on dire que le PIB du Japon est supérieur à celui de l'UE ?

EXERCICE 2.18.
Le tableau ci-dessous donne les indices de production de deux entreprises (base 100 le 31/12/1 992).

Année	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
Entreprise A	100	105	110	110	98	95	100	110
Entreprise B	100	96	97	101	110	106	110	112

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement votre réponse.
   (a) Les deux entreprises ont eu la même production au cours de l'année 1 992.
   (b) L'entreprise B n'a connu que deux années de baisse de sa production.
   (c) L'évolution en pourcentage de l'entreprise A a été la même en 1 993 et en 1 994.
2. Pour chacune des deux entreprises, en indiquant les calculs effectués, déterminer :
   - le taux d'évolution de la production sur la période 1 992-1 997 ;
   - le taux d'évolution de la production sur la période 1 997-1 999.

EXERCICE 2.19.
Les quatre premiers pays producteurs de gaz naturel et leur production en millions de m^3 sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	1 990	2 002	2 003
Russie	641 000	595 300	616 500
États-unis	504 900	537 000	541 000
Canada	106 800	187 800	180 500
Royaume-Uni	49 600	102 600	102 800

Source : Comité professionnel du pétrole Cédigaz.

1. Reproduire ce tableau en affectant pour chaque année l'indice 100 à la Russie. Quelle évolution étudie-t-on dans ce cas ?
2. Reproduire ce tableau en affectant pour chaque pays l'indice 100 à l'année 2 002. Quelle évolution étudie-t-on dans ce cas ?

Devoir surveillé n°2

Second degré – Pourcentages

EXERCICE 2.1 (6 points).

Les questions sont indépendantes.

1. On donne $f(x) = 2x^2 + 8x + 1$. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
2. Factoriser le polynôme : $P(x) = -6x^2 + x + 1$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x^2 + 2x + 1 = 0$.
4. Déterminer, selon les valeurs de x, le signe de $-x^2 - 2x + 3$.

EXERCICE 2.2 (3 points).

Les questions 1 et 2 sont indépendantes. Les réponses devront être justifiées brièvement.

1. Trois amis se partagent une somme de 250 €.
   (a) Thomas reçoit 12 % de la somme. Combien reçoit-il d'euros ?
   (b) Suzanne reçoit 50 €. Quel pourcentage de la somme a-t-elle reçu ?
   (c) Adélaïde reçoit le reste. Quelle somme a-t-elle reçu ? Quel pourcentage de la somme de départ cela représente-t-il ?
2. Pour la réservation d'une location, Mehdi doit verser 70 €, ce qui représente 14 % du prix de la location. À combien s'élève cette location ?

EXERCICE 2.3 (5 points).

On arrondira au besoin les taux au dixième.

Il y a 550 élèves en Seconde au Lycée PIERRE BOURDIEU.

Dans ce lycée, il y a des filles et des garçons et chaque élève de Seconde doit choisir en premier enseignement d'exploration : soit SES (sciences économiques et sociales), soit PFEG (principes fondamentaux de l'économie et de la gestion).

Par ailleurs :

- 50 % des Secondes sont des filles ayant choisi SES ;
- 60 % des Secondes sont des filles.

1. (a) Calculer l'effectif de filles ayant choisi SES.
   (b) Calculer l'effectif de filles.
   (c) En déduire le pourcentage des filles ayant choisi SES.
2. 62,5 % des Secondes ayant choisi SES sont des filles.
   Déterminer l'effectif des Secondes ayant choisi SES.
3. Recopier sur sa copie et compléter le tableau suivant :

	SES	PFEG	Total
Filles			
Garçons			
Total			550

4. Comparer la proportion des élèves ayant choisi PFEG parmi les garçons et celle des élèves ayant choisi PFEG parmi les filles.

EXERCICE 2.4 (6 points).

Les questions sont indépendantes. Des justifications sont attendues pour chaque réponse. Les coefficients multiplicateurs pourront être arrondis au millième et les taux au dixième.

1. Une action augmente successivement de 10 % et de 20 %. Déterminer le pourcentage global d'évolution de cette action.
2. Un capital a augmenté de 15 % puis de t % pour une augmentation globale de 22 %. Combien vaut t ?
3. Après deux baisses successives de t %, le prix d'un produit a globalement baissé de 10 %. Combien vaut t ?
4. Un article a subit une baisse de 20 %. Quel pourcentage de hausse doit-on appliquer pour compenser cette baisse ?
5. **Question bonus (hors barème)** : Après une augmentation de t % suivie d'une baisse de t %, le prix d'un produit a globalement diminué de 2,25 %. Combien vaut t ?

Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

Sommaire

3.1 Rappels sur les fonctions

Les définitions et propriétés suivantes ont été vues en Seconde aussi les exemples, remarques, illustrations seront limités et les propriétés ne seront pas démontrées.

Définition 3.1 (Notion de fonction)**.** Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f sur un ensemble D, c'est associer, à chaque réel $x \in D$, *au plus* un réel noté $f(x)$.
On dit que $f(x)$ est . . . . de x par f et que x est . . . . de $f(x)$.
On note :

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

et on lit « f, la fonction de D dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x)$ ».

Remarque. f désigne la fonction, $f(x)$ désigne le réel qui est l'image de x par f.

Définition 3.2 (Ensemble de définition)**.** L'ensemble des réels possédant une image par une fonction est appelé *ensemble de définition* de la fonction. On le note en général D_f.

Définition 3.3 (Courbe représentative)**.** Soit f une fonction. On appelle courbe représentative de f, notée en général $\mathscr{C}_f$, l'ensemble des points M de coordonnées . . . .
On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation . . . .

On veillera à ne pas confondre la fonction et sa représentation graphique.

Définition 3.4 (Variations d'une fonction)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que

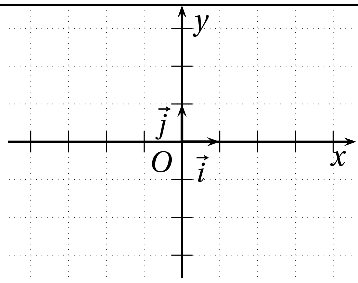
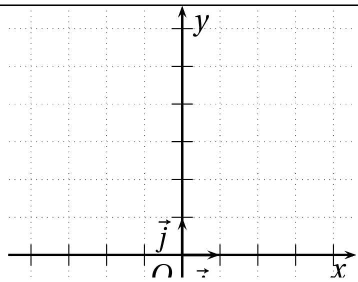
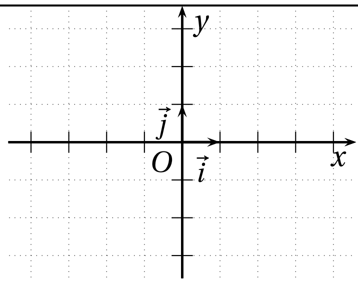
- f est *croissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : .... ;
- f est *décroissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : .... ;
- f est *monotone sur I* si ....

3.2 Fonctions de référence

3.2.1 Fonctions de référence déjà connues

Compléter le tableau 3.2.1 de la présente page.

TABLE 3.1: Fonctions de référence

Fonction Définie sur	Variations	Allure de la courbe représentative
Affine $f(x) =$ $D_f =$		
Carré $f(x) = x^2$ $D_f =$		
Inverse $f(x) =$ $D_f =$		

3.2.2 Nouvelles fonctions de référence

ACTIVITÉ 3.1 (La fonction racine)**.**
On appelle *fonction racine* la fonction qui à un réel x associe, s'il existe, le réel positif noté $\sqrt{x}$ tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction racine.
2. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur, représenter la courbe de la fonction racine.
3. Que peut-on conjecturer quant aux variations de la fonction racine ?
   Prouvons-le.
   Soit $0 \leqslant a < b$.
   (a) Que peut-on dire alors de $b - a$?
   (b) Montrer que $b - a = (\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.
   (c) Que peut-on dire du signe de $\sqrt{b} + \sqrt{a}$? En déduire le signe de $\sqrt{b} - \sqrt{a}$.
   (d) En déduire alors le sens de variation de la fonction racine.

ACTIVITÉ 3.2 (La fonction cube)**.**
On appelle *fonction cube* la fonction qui à un réel x associe, s'il existe, le réel positif x^3.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction cube.
2. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur, représenter la courbe de la fonction cube.
3. Que peut-on conjecturer quant aux variations de la fonction cube ?
   Prouvons-le.
   Soit $a < b$.
   (a) Que peut-on dire alors de $a - b$?
   (b) Montrer que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
   (c) Si a et b sont positifs, que peut-on alors dire du signe de $a^3 - b^3$? En déduire alors le sens de variation de la fonction cube sur $\mathbb{R}^+$.
   (d) Si a et b sont négatifs, que peut-on alors dire du signe de $a^3 - b^3$? En déduire alors le sens de variation de la fonction cube sur $\mathbb{R}^-$.

3.3 Autres fonctions

3.3.1 Fonctions polynômes de degré 2 (rappel)

Ces fonctions ont déjà été revues dans le chapitre 1.
Rappelons ce qui va nous servir essentiellement dans ce chapitre :

Théorème 3.1. *Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $\alpha(x - \beta)^2 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

On a déjà vu que $\alpha = a$, $\beta = -\frac{b}{2a}$ et $\gamma = -\frac{\Delta}{4a}$. On a donc :

Propriété 3.2. *Si $a \neq 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$.*

3.3.2 Fonctions homographiques (rappel)

Définition 3.5. On appelle *fonction homographique* toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où $(c;d) \neq (0;0)$.
La courbe représentative d'une telle fonction est ....

Propriété 3.3. *Soit f une fonction homographique telle que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Alors f est définie sur* ....

Propriété 3.4. *Soit f une fonction homographique de la forme $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Alors peut s'écrire sous la forme $x \longmapsto \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$*

On l'admettra.
On déterminera cette forme au cas par cas dans les exercices.
Cette forme est l'équivalent de la forme canonique même si on ne lui donne pas ce nom.

3.3.3 Opérations algébriques sur les fonctions

De la même manière qu'on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des nombres, on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des fonctions.

Définition 3.6. Soit f et g deux fonctions définies au moins sur D et k un réel. Le tableau suivant regroupe les opérations sur les fonctions f et g :

<table>
<tr><th>Opération</th><th>Notation</th><th>Définition</th><th>Définie pour</th></tr>
<tr><td>Somme de la fonction f et du réel k</td><td>$f+k$</td><td>$(f+k)(x) = f(x)+k$</td><td rowspan="2">$x \in D_f$</td></tr>
<tr><td>Produit de la fonction f et du réel k</td><td>kf</td><td>$(kf)(x) = kf(x)$</td></tr>
<tr><td>Somme des fonctions f et g</td><td>$f+g$</td><td>$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$</td><td rowspan="3">$x \in D_f \cap D_g$</td></tr>
<tr><td>Différence des fonctions f et g</td><td>$f-g$</td><td>$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$</td></tr>
<tr><td>Produit des fonctions f et g</td><td>fg</td><td>$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$</td></tr>
<tr><td>Quotient des fonctions f et g</td><td>$\frac{f}{g}$</td><td>$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$</td><td>$x \in D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$</td></tr>
</table>

Propriété 3.5 (Variations de $f+g$)**.** *Soit deux fonctions f et g définies au moins sur un ensemble D.*

- *Si f et g sont deux fonctions croissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est croissante sur D.*
- *Si f et g sont deux fonctions décroissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est décroissante sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 3.2. ◇

Propriété 3.6 (Variations de $f+k$)**.** *Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et k un réel. Les fonctions f et $f+k$ ont même sens de variation sur I.*

Preuve. Si f est croissante et $a<b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$. Donc $f(a)+k \leqslant f(b)+k$ donc $f+k$ est aussi croissante.
On démontre de la même manière si f est décroissante. ◇

Exemple. La fonction $f : x \longmapsto x^2 + 2$ a les mêmes variations que la fonction carrée.

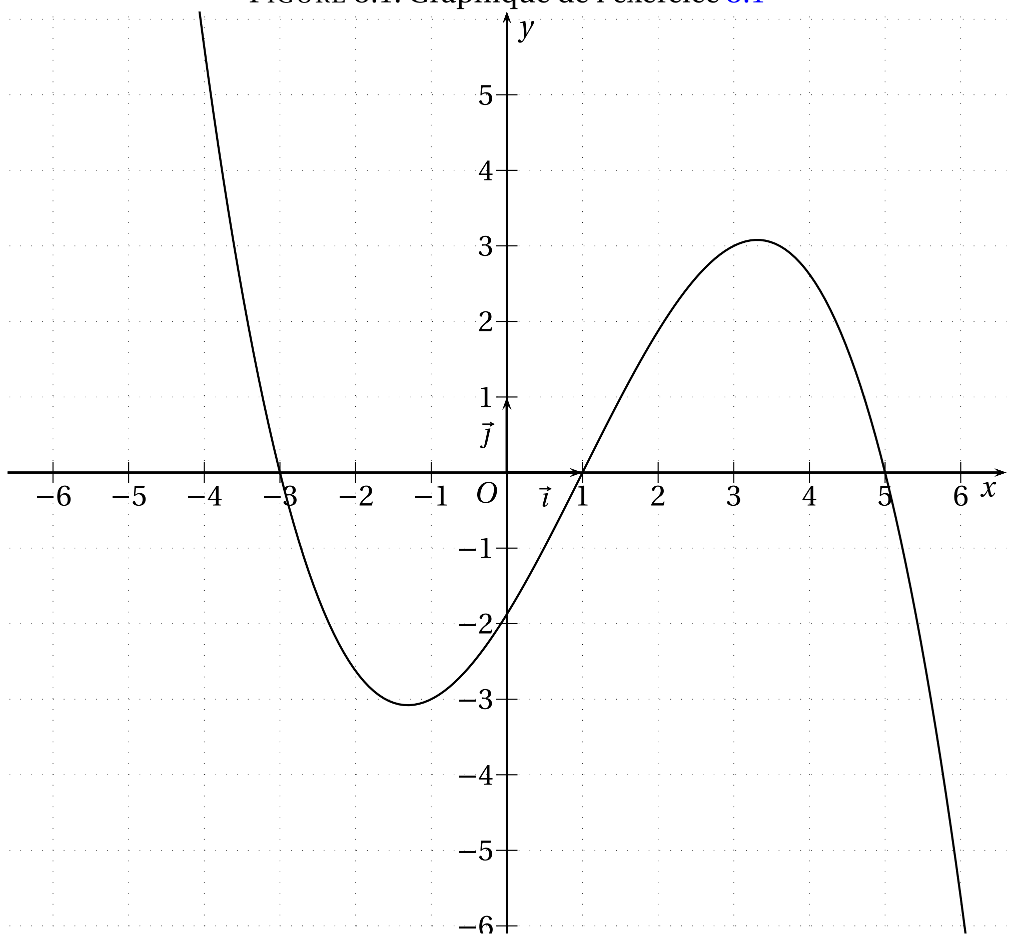
Propriété 3.7 (Variations de kf)**.** *Soit f une fonction définie et monotone sur D.*
- *Si $k > 0$ alors les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur D.*
- *Si $k < 0$ alors les fonctions f et kf ont des sens de variation opposés sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 3.3. ♢

3.4 Exercices

EXERCICE 3.1.
On a représenté sur la figure ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Tracer sur cette même figure les courbes des fonctions suivantes :
- $u = f + 2$;
- $v = -2f$;
- $w(x) = 0,5f$.

FIGURE 3.1: Graphique de l'exercice 3.1



EXERCICE 3.2 (Preuve de la propriété 3.5)**.**
Montrer que si a et b sont deux nombres d'un intervalle I tels que $a < b$ et que f et g sont croissantes sur I, alors $(f+g)(a) \leqslant (f+g)(b)$. Conclure.
Même question lorsque f et g sont décroissantes sur I.

EXERCICE 3.3 (Preuve de la propriété 3.7)**.**
Montrer que si a et b sont deux nombres d'un intervalle I tels que $a < b$, si f croissante sur I et si $k < 0$ alors $kf(a) \geqslant kf(b)$. Conclure.

EXERCICE 3.4.
On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-5;10]$:

$$\begin{array}{|c|ccccccccc|}
\hline
x & -5 & & 3 & & 5 & & 7 & & 10 \\
\hline
 & 3 & & & & 2 & & & & \\
f & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & 0 & \searrow & \\
 & & & 0 & & & & & & -3 \\
\hline
\end{array}$$

Pour chacune des fonctions suivantes, dresser son tableau des variations en justifiant brièvement :

1. $g = f - 1$
2. $h = 2f$
3. $i = -f$
4. $j = -3f$

EXERCICE 3.5.
Soit f la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 11$.

1. Donner la forme canonique de f.
2. (a) Compléter les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ccccc}
3 & \leqslant & a & < & b \\
3-3 & \dots & a-3 & \dots & b-3 \\
\dots & \dots & (a-3)^2 & \dots & (b-3)^2 \\
\dots & \dots & (a-3)^2+2 & \dots & (b-3)^2+2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

   (b) Que peut-on en conclure ?
3. Faire le même travail en partant de : $a < b \leqslant 3$ et conclure.

EXERCICE 3.6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

1. Donner la forme canonique de f.
2. Déterminer par le calcul les variations de f.

EXERCICE 3.7.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$.

1. Donner la forme canonique de f.
2. Déterminer par le calcul les variations de f.

EXERCICE 3.8.
Soit f la fonction homographique définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

1. (a) Compléter les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & < & a & < & b \\
1-1 & \dots & a-1 & \dots & b-1 \\
\dots & \dots & \frac{1}{a-1} & \dots & \frac{1}{b-1} \\
\dots & \dots & \frac{2}{a-1} & \dots & \frac{2}{b-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

   (b) Que peut-on en conclure ?
2. Faire le même travail en partant de $a < b < 1$ et conclure.

EXERCICE 3.9.
Soit f la fonction homographique définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$.

1. Montrer que $f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$.
2. Étudier les variations de f sur $]-2\,;+\infty[$.
3. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;-2[$.

EXERCICE 3.10.
Soit f la fonction homographique définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$.

1. Montrer que $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$.
2. Étudier les variations de f sur $]2\,;+\infty[$.
3. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;2[$.

EXERCICE 3.11.
Soit f la fonction homographique telle que $f : x \longmapsto \frac{-4x-1}{2x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que $f(x) = -2 - \frac{3}{2x-1}$.
3. Étudier les variations de f sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.
4. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$.

EXERCICE 3.12.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+1}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire.
On considère la fonction g définie par : $g(x) = -\frac{4}{x+1}$.
Étudier les variations de g sur $]-1\,;+\infty$ et sur $]-\infty\,;-1[$.
Partie B.

1. Montrer que : $f(x) = x + 1 - \frac{4}{x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
2. Justifier que f est la somme de deux fonctions croissantes sur chacun des intervalles où elle est définie.
3. En déduire les variations de f sur chacun des intervalles où elle est définie.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.

EXERCICE 3.13.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2+5x-4}{x-2}$$

1. Montrer que : $f(x) = -x + 3 + \frac{2}{x-2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$.
2. En déduire les variations de f sur chacun des intervalles où elle est définie.
3. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.

Devoir surveillé n°3

Généralités sur les fonctions

EXERCICE 3.1 (4,5 points)**.**
f est une fonction définie sur $[-10\,;\,10]$ et son tableau de variations est le suivant :

x	-10	-1	2	8	10
f	4 ↘	1 ↗	9 ↘	-5 ↗	-1

Pour chacune des fonctions suivantes donner son tableau des variations en justifiant brièvement.

1. $g = f - 3$
2. $h = 2f$
3. $i = -4f$

EXERCICE 3.2 (7 points)**.**
f est la fonction trinôme telle que $f : x \longmapsto -2x^2 + 4x + 1$.

1. Déterminer la forme canonique de f.
2. Étudier les variations de f à partir de sa forme canonique sur :
   (a) $[1\,;\,+\infty[$;
   (b) $]-\infty\,;\,1]$.
3. Dresser le tableau des variations de f.

EXERCICE 3.3 (8,5 points)**.**
On se propose d'étudier quelques caractéristiques de la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{4x^2 - 14x + 6}{2x - 5}$$

ou de sa courbe $\mathscr{C}$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;\,\frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}\,;\,+\infty[$ par :

$$g : x \longmapsto -\frac{4}{2x-5}$$

Montrer que g est croissante $]\frac{5}{2}\,;\,+\infty[$
On admettra qu'elle l'est aussi sur $]-\infty\,;\,\frac{5}{2}[$.

Partie B : Étude de f

1. Déterminer $\mathscr{D}$, le domaine de définition de f.
2. Montrer que $f(x) = 2x - 2 - \frac{4}{2x-5}$ pour $x \in \mathscr{D}$.
3. En déduire les variations de f sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}$.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels entre $\mathscr{C}$ et chacun des axes du repère.

Chapitre 4

Statistiques

Sommaire

4.1 Rappels de Seconde

4.1.1 Vocabulaire

Définition 4.1. Une série statistique est un ensemble d'observations collectées et on a les définitions suivantes :

- *Population* : C'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique ;
- *Individu* : C'est un élément de la population ;
- *Caractère* : C'est ce qu'on observe chez l'individu ;
- *Modalité* : Ce sont les différentes valeurs prises par le caractère ;
- La série statistique est dite *quantitative* quand les modalités sont des nombres et *qualitative* sinon ;
- Dans le cas d'une série quantitative, celle-ci est dite *discrète* si les modalités sont limitées à un ensemble fini de valeurs et *continue* si les modalités peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle.

Exemples.

- On peut s'intéresser à une classe (population), comportant des élèves (individus) et observer leur nombre de frères et sœurs (caractère) qui peuvent être $0, 1, 2, \ldots$ (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative discrète.
- On peut s'intéresser à une chaîne d'usine produisant des bras de suspension pour voiture (population), et observer sur chaque pièce (individu) ses dimensions exactes (caractère) qui peuvent varier entre 500 et 750 mm (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative continue.

- On peut s'intéresser à la population française (population dont on prendra un échantillon) comportant des individus (individus) et estimer leur intention de vote (caractère) pouvant être n'importe lequel des candidats se présentant (modalités), ces données formant alors une série statistique qualitative.

Définition 4.2. On a aussi :
- *Effectif* d'une modalité : C'est le nombre de fois que la modalité d'un caractère revient dans la série ;
- *Fréquence* d'une modalité : C'est l'effectif de la modalité divisé par l'effectif total ; elle est comprise entre 0 et 1 ;
- *Classes* : s'il y a trop de modalités différentes, elles sont rangées par *classe* (intervalle), l'effectif de la classe étant alors le nombre de modalités appartenant à cet intervalle.

4.1.2 Mesures centrales

Elles visent à résumer la série par une seule valeur qu'on espère représentative de toutes les valeurs de la série.

Moyenne arithmétique

Définition 4.3 (Moyenne arithmétique)**.** La *moyenne arithmétique* d'une série statistique quantitative $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est le nombre, noté $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Remarques.
- De la définition, on peut déduire que $n\overline{x} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, ce qui peut s'interpréter de la manière suivante : « La somme de toutes les valeurs de la série est inchangée si on remplace chaque valeur par $\overline{x}$ ».
- Si la série S comporte n données selon p modalités $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) n_1, n_2, ..., n_p, alors $\overline{x} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_px_p}{\underbrace{n_1+n_2+\ldots+n_p}_{\text{effectif total}}}$

La moyenne a des avantages calculatoires : si l'on connaît les moyennes et les effectifs de deux séries (ou deux sous-séries), on peut obtenir la moyenne de la série constituée de l'agrégation de ces deux séries. Elle a le défaut d'être sensible aux valeurs extrêmes.

Médiane

Définition (Médiane dans le cas général)**.** On appelle *médiane* d'une série statistique quantitative tout nombre m tel que :
- la moitié au moins des valeurs de la série est inférieure à m
- la moitié au moins des valeurs de la série est supérieure à m

Remarques.
- Rappel : mathématiquement « inférieur » et « supérieur » signifient, en français, « inférieur ou égal » et « supérieur ou égal ».
- On admettra qu'un tel nombre existe toujours.
- La médiane partage la série en deux sous-séries ayant *quasiment* le même effectif ; *quasiment* car si plusieurs valeurs de la série sont égales à la médiane, les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane ne seront pas forcément en nombre égal.

- Il faut comprendre la médiane comme « la valeur du milieu ».

Plusieurs valeurs peuvent parfois convenir pour la médiane, aussi convient-on de prendre, dans le cadre scolaire [1], les valeurs, uniques, suivantes :

Définition 4.4 (Médiane dans le cadre scolaire)**.** Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$.
- Si n est impair, la $\frac{n+1}{2}^{\text{ième}}$ donnée de la série est la médiane.
- Si n est pair, tout nombre compris entre le $\frac{n}{2}^{\text{ième}}$ élément de la série et le suivant est **une** médiane ; dans le cadre scolaire **la** médiane sera la moyenne des deux données centrales de la série :
$$m = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ième}} + \left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ième}}}{2}$$

C'est cette médiane qui sera attendue systématiquement dans les exercices et les évaluations.

La médiane a l'avantage de ne pas être influencée par les valeurs extrêmes. Elle n'a aucun avantage pratique dans les calculs, puisque, pour connaître la médiane d'une série constituée de l'agrégation de deux séries, il faut nécessairement re-ordonner la nouvelle série pour trouver sa médiane, qui n'aura pas de lien avec les deux médianes des deux séries initiales.

4.1.3 Mesures de dispersion

Elles visent à indiquer comment les données de la série statistique sont dispersées par rapport aux mesures centrales.

Valeurs extrêmes

Définition 4.5. Les valeurs extrêmes d'une série quantitative sont ses valeurs *minimale* et *maximale* et l'*étendue* est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.

Quartiles

Définition (Quartiles dans le cas général)**.** Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1
- On appelle *deuxième quartile*, noté Q_2, tout réel tel que
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_2
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à m
- On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3

Remarques.
- Q_2 est, par définition, la médiane de la série.
- On admettra que de tels nombres existent toujours.
- La médiane partage une série en deux sous-séries ayant quasiment le même effectif (environ 50 %) ; les premier, troisième quartiles et la médiane partageront une série en quatre sous-séries ayant quasiment le même effectif (environ 25 %).

1. Les statisticiens, eux, prennent n'importe quel nombre convenant parmi les médianes possibles ; sur des séries de grande taille, ils ont tous le même ordre de grandeur

Comme pour la médiane, selon le nombre n de données dans la série, il y a parfois plusieurs possibilités. Aussi on convient de prendre, dans le cadre scolaire [2], systématiquement les nombres suivants :

Définition 4.6 (Quartiles dans le cadre scolaire)**.** Soit S une série statistique quantitative dont les données sont ordonnées dans l'ordre croissant. On appelle :

- *premier quartile*, noté Q_1, **la première valeur de la série** telle qu'au moins 25 % des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1 ;
- *troisième quartile*, noté Q_3, **la première valeur de la série** telle qu'au moins 75 % des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3.

Ce sont ces quartiles qui seront attendus systématiquement dans les exercices et les évaluations.

Remarque. Si l'on adopte le même type de définition pour le deuxième quartile on ne tombe pas forcément sur la valeur de la médiane telle que définie dans le cadre scolaire.
Par exemple la série $S = \{1;2;3;4\}$ a pour médiane $m = \frac{2+3}{2} = 2,5$ et pour deuxième quartile $Q_2 = 2$ car c'est la première valeur de la série telle que au moins 50 % des valeurs de la série lui sont inférieures.

La propriété suivante permet de trouver aisément Q_1 et Q_3 :

Propriété 4.1. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *telles que* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$. *Alors :*

- *La donnée de rang* $\frac{1}{4}n$ *(arrondi au supérieur si ce n'est pas un entier) convient toujours comme premier quartile.*
- *La donnée de rang* $\frac{3}{4}n$ *(arrondi au supérieur si ce n'est pas un entier) convient toujours comme troisième quartile.*

On l'admettra.

Exemples 4.1.

- S'il y a $n = 29$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :
  - $\frac{1}{4} \times 29 = 7,25 \approx 8$ donc la huitième donnée de la série convient comme premier quartile ;
  - $\frac{3}{4} \times 29 = 21,75 \approx 22$ donc la vingt-deuxième donnée de la série convient comme troisième quartile.
- S'il y a $n = 64$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :
  - $\frac{1}{4} \times 64 = 16$ donc la seizième donnée de la série convient comme premier quartile ;
  - $\frac{3}{4} \times 64 = 48$ donc la quarante huitième donnée de la série convient comme troisième quartile.

Propriété 4.2. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *avec* $n \geqslant 5$.
On ne change les quartiles et la médiane si on remplace x_1 *par n'importe quel nombre de l'intervalle* $]-\infty; x_1]$ *et* x_n *par n'importe quel nombre de l'intervalle* $[x_n; +\infty[$.

Preuve. Comme on ne change pas le nombre de valeurs de la série, il y en aura toujours autant inférieures et supérieures à Q_1, m et Q_3. ♢

Une fois les premier et troisième quartiles disponibles, on définit l'écart et l'intervalle interquartile de la manière suivante :

Définition 4.7. Soit S une série statistique quantitative et Q_1 et Q_3 ses premier et troisième quartiles. On appelle :

- *écart interquartile* la différence $Q_3 - Q_1$;
- *intervalle interquartile* l'intervalle $[Q_1; Q_3]$.

2. Ce sont aussi ces quartiles que prennent les statisticiens

4.2 Un problème

Soit S_1, S_2 et S_3 les trois séries de notes suivantes :

- $S_1 = \{2;2;4;4;6;10;14;16;16;18;18\}$
- $S_2 = \{2;8;9;10;10;10;11;12;18\}$
- $S_3 = \{2;5;5;5;5;6;6;7;9;10;11;13;14;14;15;15;15;15;18\}$

1. Pour chacune de ces séries, déterminer les valeurs extrêmes, la moyenne et la médiane. Que constate-t-on ?
2. Ces trois séries n'ont pas la même allure.
   (a) Déterminer les premier et troisième quartiles de chaque série. Témoignent-ils des allures de chaque série ?
   (b) Inventer des mesures, basées sur les distances entre les valeurs centrales de la série et chacun des nombres de la série qui peuvent être mesurées par :
   - la distance entre a et b est donnée par $|a-b|$
   - la distance entre a et b est donnée par $(a-b)^2$

4.3 Bilan et compléments

4.3.1 Variance, écart-type

Définition 4.8. Soit S une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$.
On appelle :

- *moyenne arithmétique* de S, notée $\overline{x}$, le nombre $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$.
- *variance* de S, notée V, le nombre $V = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)^2}{n} = \frac{(\overline{x}-x_1)^2+\dots+(\overline{x}-x_n)^2}{n}$
- *écart-type* de S, noté s, le nombre $s = \sqrt{V}$.

Les formules de la définition sont équivalentes aux suivantes :

Propriété 4.3. *Soit S une série statistique quantitative comportant n données selon p modalités $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) n_1, n_2, …, n_p, alors :*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_px_p}{n_1+n_2+\dots+n_p} \qquad V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\left(\overline{x}-x_i\right)^2}{n_1+n_2+\dots+n_p}$$

La preuve sera faite en classe.

Remarque. La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle mesure donc la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Elle n'est pas très parlante car elle s'exprime dans le carré de l'unité du caractère.
L'écart-type a l'avantage de s'exprimer dans la même unité que le caractère.
L'écart-type permet de comparer la dispersion de deux séries, quand l'ordre de grandeur des données des deux séries est le même. Contrairement à l'écart interquartile, il tient compte de l'ensemble de la population.

On dispose d'une formule plus pratique pour calculer la variance :

Théorème 4.4. *Soit S une série statistique quantitative comportant n données selon p modalités $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) n_1, n_2, …, n_p, alors :*

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i} - \overline{x}^2$$

La preuve sera faite en classe.

4.3.2 Représentations graphiques

Diagramme à bâtons, histogramme

Si les données sont regroupées en classes (intervalles), la série peut-être représentée par un histogramme où chaque rectangle a son *aire* proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) de la classe. Ainsi si on considère la série :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	3	5	6	5	6	7	7	10	13	20	25	21	23	12	10	5	7	5	3	2	1

Et la même regroupée en classe :

x_i	$[0;5,5]$	$]5,5;8,5]$	$]8,5;11,5]$	$]11,5;14,5]$	$]14,5;20]$
n_i	30	30	66	45	23

On obtient les diagrammes en bâtons (figure 4.1, de la présente page) et histogramme (figure 4.2, page ci-contre).

FIGURE 4.1: Diagramme en bâtons

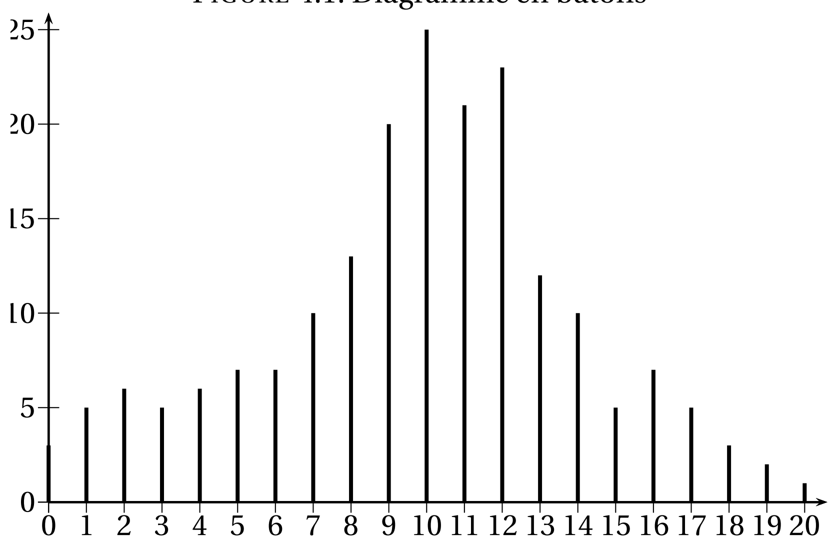
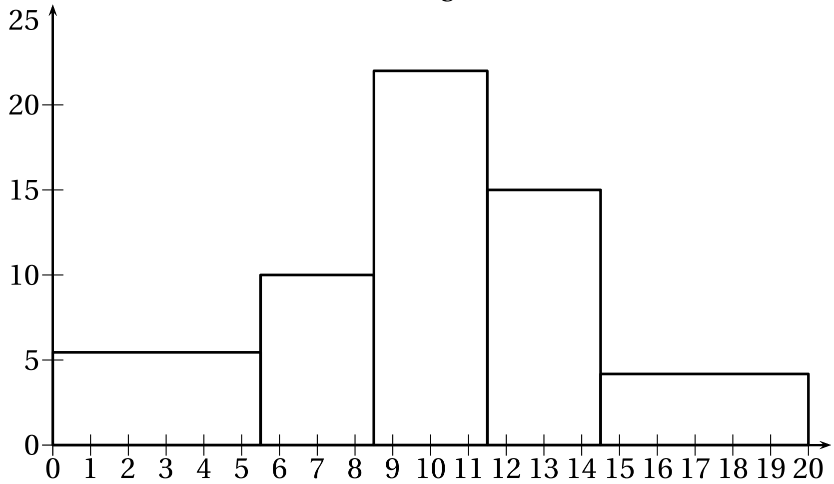


Diagramme en boite

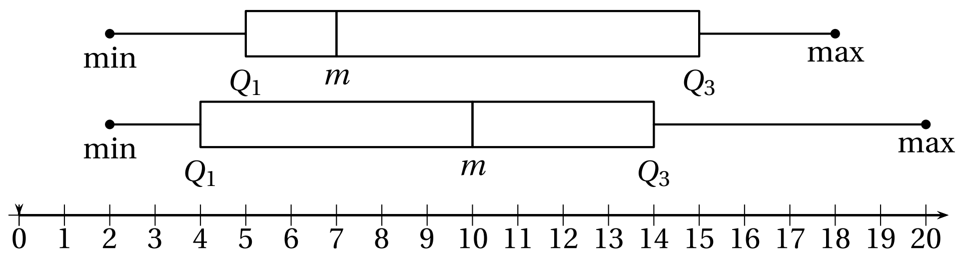
On peut représenter graphiquement les valeurs extrêmes, les quartiles et la médiane par un diagramme en boite, appelé aussi boite à moustaches, conçues de la manière suivante :

- au centre une boite allant du premier au troisième quartile, séparée en deux par la médiane ;
- de chaque côté une moustache allant du minimum au premier quartile pour l'une, et du troisième quartile au maximum pour l'autre.

FIGURE 4.2: Histogramme



x_i	$[0;5,5]$	$]5,5;8,5]$	$]8,5;11,5]$	$]11,5;14,5]$	$]14,5;20]$
n_i	30	30	66	45	23
Aire = n_i	30	30	66	45	23
Largeur = amplitude de la classe	5,5	3	3	3	5,5
Hauteur = $\dfrac{\text{Aire}}{\text{Largeur}}$	5,45	10	22	15	4,18



Ces diagrammes permettent une interprétation visuelle et rapide de la dispersion des séries statistiques. Ils permettent également d'apprécier des différences entre des séries (lorsqu'elles ont des ordres de grandeurs comparables).

Remarques.

- La hauteur des boites est arbitraire (on les fait parfois proportionnelles à l'effectif total de la série).
- La boite contient les 50% des données centrales.

4.4 Exercices

EXERCICE 4.1.
On a relevé le prix de vente d'un CD et le nombre de CD vendus chez différents fournisseurs. Les résultats forment une série statistique à une variable donnée par le tableau ci-dessous.

Prix de vente (en €)	15	16	17	18	19
Nombre de CD vendus	83	48	32	20	17

1. Quelles sont les différentes valeurs de la série.
2. Donner la fréquence correspondant à chacune de ces valeurs.
3. Donner la moyenne et l'écart-type de la série. Que représentent ces nombres ?
4. Représenter la série par un diagramme à bâtons.

EXERCICE 4.2.
Dans une classe de 30 élèves, la moyenne des 20 filles est 11,5 et la moyenne des 10 garçons est 8,5. Donner la moyenne de classe.

EXERCICE 4.3.
On donne la série suivante : 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 17.

1. Représenter le diagramme en boîte correspondant.
2. Quel est l'écart interquartile de la série ?
3. Quel est l'intervalle interquartile de la série ?

EXERCICE 4.4.
Le tableau ci-dessous donne une répartition des salaires mensuels en euros des employés dans une entreprise.

Salaire	$[1\,000\,;1\,200[$	$[1\,200\,;1\,500[$	$[1\,500\,;2\,000[$	$[2\,000\,;3\,000[$	$[3\,000\,;10\,000[$
Effectif	326	112	35	8	3

1. Quel est le nombre d'employés de l'entreprise ?
2. Quel est le nombre d'employés touchant un salaire mensuel supérieur ou égal à 1 200 € ?
3. Représenter les données par un histogramme.
4. Quel est le salaire moyen des employés de l'entreprise ?

EXERCICE 4.5.
Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 courtilières adultes.
33, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 50.

1. Organiser les relevés dans le tableau d'effectifs suivant :

Valeur	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Effectif																		
Effectif cumulé croissant																		

2. Représenter les données par un diagramme à bâtons. Un diagramme circulaire serait-il intéressant ?
3. Calculer la moyenne de la série. Déterminer sa médiane. Déterminer les premier et troisième quartiles.
4. Construire le diagramme en boîte correspondant.

5. On regroupe les données en classes. Compléter le tableau des effectifs suivants :

Valeur	[33 ; 37[	[37 ; 40[	[40 ; 42[	[42 ; 44[	[44 ; 47[	[47 ; 51[
Effectif						

Dessiner l'histogramme correspondant.

EXERCICE 4.6.
Huit sprinters effectuent deux 100 m. Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

Sprinter	A	B	C	D	E	F	G	H
Sprint 1	10"14	10" 17	9"94	10" 05	10"25	10" 09	9" 98	10"32
Sprint 2	10"41	9"97	9" 96	10" 12	10" 19	10" 24	10"12	10" 17

Soit (x_i) les temps respectifs des sprinters A, B, ..., H au sprint 1 et (yi) les temps respectifs des sprinters A, B, ..., H au sprint 2.

1. Calculer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des séries (x_i) et (y_i).
2. Calculer les écarts-types s_x et s_y des séries (x_i) et (y_i).
3. Lequel des deux sprints a été le plus homogène ?

EXERCICE 4.7.
Le tableau suivant donne les temps de cinq sportifs qui ont couru un 1 500 m et un 5 000 m.

	Coureur 1	Coureur 2	Coureur 3	Coureur 4	Coureur 5
1 500 m	3'58"17	4'05"48	4'12"97	4'08"29	4'00"12
5 000 m	14'58"12	14'47"08	15'37"85	13'57"70	14'48"34

On veut déterminer quelle est la course la plus homogène.
Le problème est que les données de chaque série ne sont pas du même ordre de grandeur. En effet un écart de 30 s, par exemple, sera proportionnellement plus important lors de la première course qu'un écart de 1 min lors de la seconde.
Pour palier à cette difficulté on utilise l'écart-type relatif, noté C_v, appelé coefficient de variation définit par $C_v = \frac{s}{\overline{x}}$ et un écart interquartile relatif, définit par $\frac{Q_3 - Q_1}{m}$.

1. Utilisation des coefficients de variation
   (a) Calculer le temps moyen $\overline{m}$, l'écart-type s puis le coefficient de variation $C_v = \frac{s}{\overline{m}}$ pour le 1 500 m. (*On pourra convertir tous les temps en secondes*).
   (b) Faire de même pour le 5 000 m.
   (c) Conclure.
2. Utilisation de l'interquartile relatif
   (a) Déterminer la médiane m_e et les quartiles Q_1 et Q_3 pour le 1 500 m. En déduire l'interquartile relatif $\frac{Q_3 - Q_1}{m_e}$.
   (b) Faire de même pour le 5 000 m.
   (c) Conclure.
3. Donner une explication à la contradiction entre 1.c) et 2.c).

EXERCICE 4.8.
Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Histoire-Géographie :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
H.-G.	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

Le but de l'exercice est de comparer la dispersion des notes en Maths et en Histoire-Géographie.

1. Utilisation des quartiles
   (a) Calculer la médiane et l'écart interquartile en Maths.
   (b) Calculer la médiane et l'écart interquartile en Histoire-Géographie.
   (c) Représenter les diagrammes en boîte des notes en Maths et en Histoire-Géographie.
   (d) Interpréter ces résultats.
2. Utilisation des écarts-types
   (a) Calculer la moyenne et l'écart-type en Maths.
   (b) Calculer la moyenne et l'écart-type en Histoire-Géographie.
   (c) Interpréter ces résultats.

EXERCICE 4.9.
Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Sciences de la vie et de la terre :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	1	0	2	0	1	3	0	5	0	2	1	1	0	0	0	2	1	1	0	2
SVT	0	1	0	0	0	0	0	4	4	1	0	3	1	4	2	0	1	0	0	0	1

1. (a) Déterminer les rangs des quartiles et de la médiane des deux séries puis donner leurs valeurs.
   (b) Faire le diagramme en boite des deux séries sur une même échelle puis commenter le diagramme.
2. (a) Déterminer la moyenne des notes de Mathématiques et la comparer à la médiane en expliquant ce qui cause cet écart.
   (b) Déterminer la moyenne des notes de Sciences de la vie et de la terre. L'écart avec la moyenne est-il le même ? Pourquoi ?
   (c) Déterminer les écarts types des deux séries (arrondis au dixième) et commenter vos résultats.

Devoir surveillé n°4

Statistiques

Les élèves d'une classe de Première S, qui en comporte 34, ont obtenu au premier trimestre les moyennes suivantes en *Mathématiques*, arrondies au demi-point, qui donnent la série statistique S :

Moyenne	7,5	8	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15	15,5	16
Effectif	1	1	1	5	2	2	5	1	4	2	4	2	2	2

On appelle S' la série constituée par les résultats obtenus par cette même classe durant la même période en *Anglais*.

Partie A : Diagramme à bâtons

Représenter la série S par un diagramme à bâtons dans le repère de la figure 4.1 donnée en annexe qui est à rendre avec sa copie.

Partie B : Médiane et quartiles

1. Déterminer m, la médiane, et Q_1 et Q_3, les premier et troisième quartiles, de la série S.
On détaillera brièvement l'obtention de chacun de ces paramètres statistiques.
2. La série statistique S' a les paramètres suivants :

Minimum	Quartile 1 : Q'_1	Médiane : m'	Quartile 3 : Q'_3	Maximum
4,5	9,5	12	13,5	16,5

   (a) Représenter sur la figure 4.2 donnée en annexe les diagrammes en boite correspondant aux séries S et S'.

   (b) Comparer, en se basant sur les diagrammes en boites, les deux séries.

Partie C : Moyenne et écart-type

1. Déterminer $\overline{x}$ et s, respectivement, la moyenne et l'écart-type de la série S.
On pourra bien évidemment utiliser la calculatrice pour ces calculs mais on indiquera sur sa copie les calculs permettant d'obtenir ces paramètres statistiques en utilisant éventuellement des « … ».
On n'arrondira pas les résultats intermédiaires ; on arrondira les résultats finaux au dixième.
2. Les moyenne et écart-type de la série S' sont, respectivement, $\overline{x'} \approx 11,6$ et $s' \approx 2,8$.
Comparer les deux séries en se basant sur les moyennes et écart-types.
Cela confirme-t-il ce qui a été obtenu dans la partie A ?

Partie D : Histogramme

Le professeur de mathématiques vous demande de regrouper la série S en classe puis d'en faire la représentation graphique.

1. Recopier sur sa copie et compléter le tableau ci-dessous :

Valeur	[0 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 20]
Effectif						

2. Représenter cette série dans le repère de la figure 4.3 donnée en annexe par un histogramme.
On indiquera sur sa copie comment ont été obtenues les dimensions des barres.

Nom :

FIGURE 4.1: Diagramme à bâtons

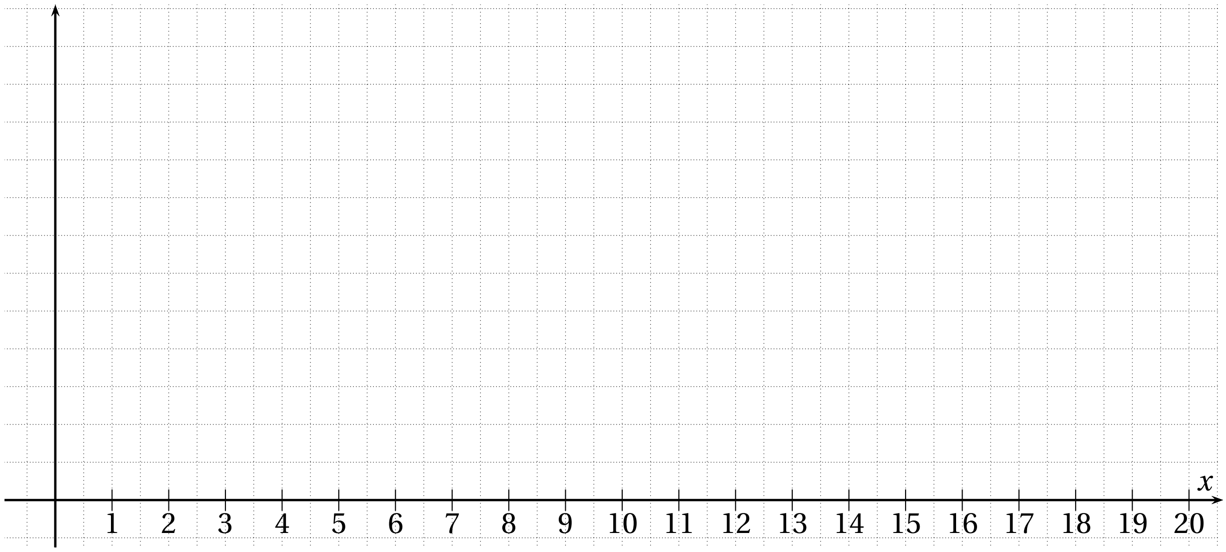


FIGURE 4.2: Diagramme en boite

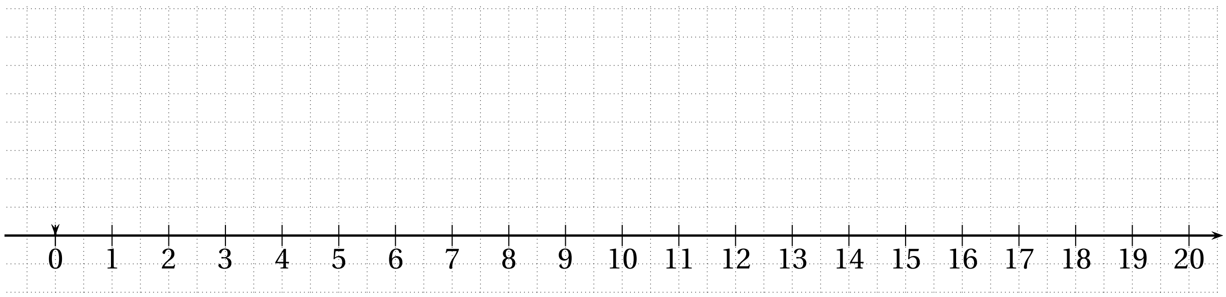
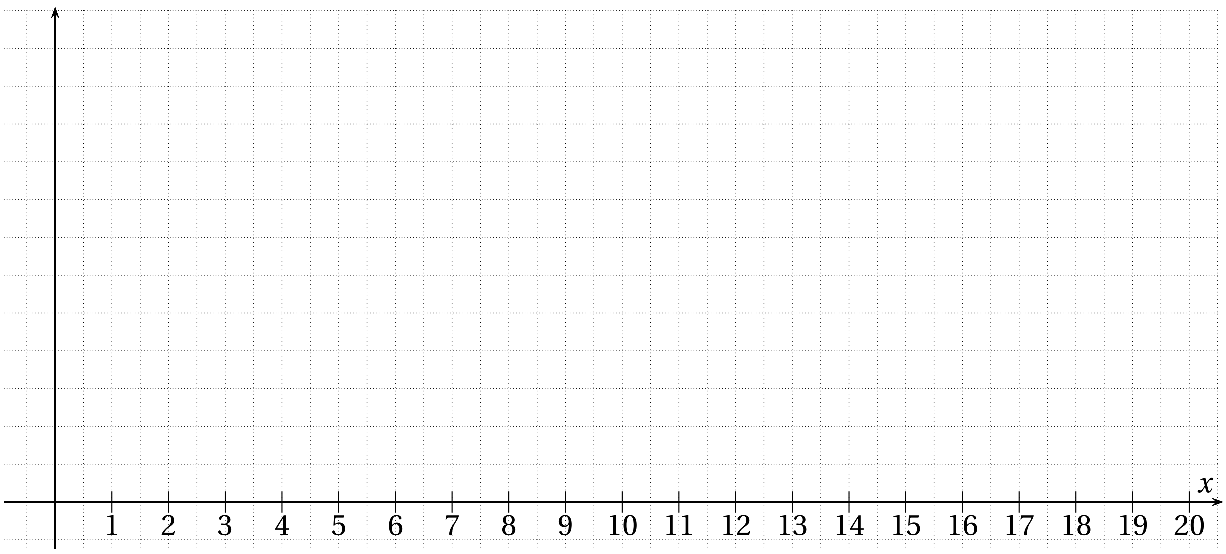


FIGURE 4.3: Histogramme



Chapitre 5

Nombre dérivé

Sommaire

5.1 Activités

ACTIVITÉ 5.1 (Vitesse moyenne, vitesse instantanée)**.**
Un corps en chute libre, avec une certaine vitesse initiale, a son altitude donnée au bout de t secondes par la fonction $h(t)$ (en mètres) exprimée par :

$$h(t) = -4,9t^2 + 20t + 15$$

1. (a) Quelle est son altitude au départ de sa trajectoire ?
   (b) Au bout de combien de temps touche-t-il le sol ? *On appellera ce temps t_0 pour la suite.*
2. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,t_0]$.
3. (a) Quelle distance a-t-il parcouru entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 1$?
   (b) Quelle est alors la vitesse moyenne à laquelle varie son altitude sur cet intervalle de temps ?
   (c) Mêmes questions entre les instants :
      - $t = 1$ et $t = 2$
      - $t = 2$ et $t = 3$
      - $t = 3$ et $t = 4$
      - $t = 4$ et $t = t_0$.
   (d) Comment peut-on retrouver graphiquement ces vitesses moyennes ?
4. Inventer une manière d'estimer sa vitesse initiale.

Activité 5.2 (Nombre dérivé)**.**
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 25$ et on appelle $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.
On appelle :
- T le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse 1 ;
- T_h le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $1 + h$ où h est un réel ;
- $\mathscr{D}_h$ la sécante (TT_h) ;
- m_h le coefficient directeur de $\mathscr{D}_h$.

1. On suppose que $h = 1$.
   (a) Déterminer l'abscisse x_1 et y_1 et l'ordonnée de T_1.
   (b) Déterminer m_1 le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}_1$.
2. En vous inspirant que la question précédente, compléter le tableau suivant :

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
x_h					
y_h					
m_h					

3. Montrer, par le calcul, que, dans le cas général, $m_h = -2 - h$ pour $h \neq 0$
4. Quand h *tend* vers 0 :
   (a) Vers quelle valeur *tend* m_h ?
   (b) Vers quel point *tend* T_h ?
   (c) Vers quelle droite *tend* la sécante $\mathscr{D}_h$?
   (d) En déduire l'équation réduite de cette droite.

On appellera *tangente* à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse 1, la droite de laquelle se rapproche la sécante $\mathscr{D}_h$ quand h *tend* vers 0 et on appellera *nombre dérivé de* $f(x)$ *en 1* le coefficient directeur de la tangente.

5.2 Bilan et compléments

5.2.1 Accroissement moyen

Définition. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres *distincts* a et b le nombre :
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On écrit la plupart du temps $a + h$ à la place de b et la définition devient alors :

Définition 5.1. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres a et $a + h$, avec $h \neq 0$, le nombre :
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Les deux définitions sont équivalentes (il suffit de poser $b = a + h$). C'est la seconde que nous utiliserons pour la suite.

5.2.2 Nombre dérivé

On a vu dans les activités que cet accroissement moyen *tendait* vers l'accroissement « instantané » quand h *tendait* vers 0. Cet accroissement « instantané » est appelé *nombre dérivé* en mathématiques, et on a donc la définition suivante :

Définition 5.2 (Dérivabilité et nombre dérivé)**.** Si, quand h *tend* vers 0, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers un nombre A, on dit que la fonction f est *dérivable en a* et on appelle A le *nombre dérivé de f en a*. On le note $f'(a)$.

Remarques.

- On note parfois $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ l'accroissement moyen, surtout en physique.
  Δx est la différence [1] entre deux valeurs de x, $\Delta f(x)$ celle entre les deux valeurs correspondantes de $f(x)$.
- On note parfois $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ le nombre dérivé. Le d indique là encore une différence mais entre deux valeurs infiniment proches.
- Ces nombres correspondent à des quantités concrètes qui dépendent de la nature de la fonction f ou de la variable. Ainsi, si $f(t)$ est la distance parcourue au bout d'un temps t, la variation moyenne ne sera rien d'autre que la vitesse moyenne et le nombre dérivé est la vitesse instantanée.

Exemple 5.1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 7$ est-elle dérivable en $a = 2$?
Pour le savoir étudions la quantité suivante : $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}\\ &= \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = \frac{h(12+6h+h^2)}{h}\\ &= 12+6h+h^2 \text{ avec } h \neq 0\end{aligned}$$

Lorsque h *tend* vers 0 (en restant différent de 0), $12+6h+h^2$ *tend* vers 12. Donc f est dérivable en $a = 2$ et son nombre dérivé en 2 est 12. On note alors $f'(2) = 12$.

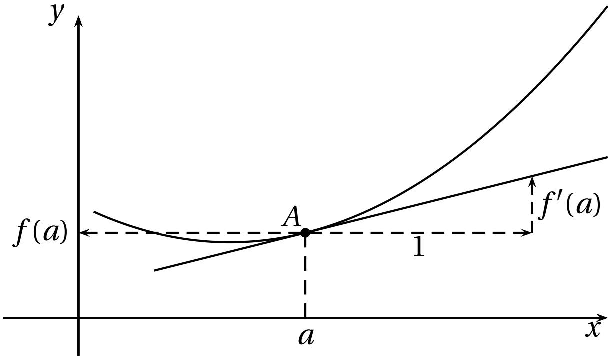
Interprétation graphique du nombre dérivé

Définition 5.3 (Tangente à une courbe)**.** On appelle *tangente à une courbe $\mathscr{C}$ en un point M*, appartenant à $\mathscr{C}$, une droite passant par M et qui, si elle existe, est aux alentours de M, la droite la plus proche de $\mathscr{C}$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $A(a; f(a))$ et $B(a+h; f(a+h))$, deux points de cette courbe.
La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AB), sécante à la courbe.
Lorsque h *tend* vers 0, la sécante (AB) *tend* vers la tangente à la courbe au point A et le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers le coefficient directeur de la tangente en A.
On a donc la propriété suivante, qu'on admettra :

Propriété 5.1. *Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.*
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

FIGURE 5.1: Interprétation graphique du nombre dérivé



Le schéma 5.1 de la présente page illustre cette propriété.

Remarque. Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de la tangente ; en particulier, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente. Cela nous permet d'obtenir, dans le cas général, l'équation de la tangente.

Propriété 5.2. *Soit f une fonction définie et dérivable en a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Alors $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse a une tangente T_a d'équation*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

La preuve sera faite en classe.

5.3 Exercices

5.3.1 Coefficients directeurs (rappels)

EXERCICE 5.1.
Déterminer graphiquement les coefficients directeurs m des droites de la figure 5.2 page ci-contre (on les indiquera sur le graphique).

EXERCICE 5.2.
Dans le repère de la figure 5.3 page suivante, représenter les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(0;1)$ et de coefficient directeur $m = 2$;
- $\mathscr{D}_2$ passant par le point $B(1;0)$ et de coefficient directeur $m = -1$;
- $\mathscr{D}_3$ passant par le point $C(-1;-1)$ et de coefficient directeur $m = \frac{1}{4}$;
- $\mathscr{D}_4$ passant par le point $D(1;2)$ et de coefficient directeur $m = -\frac{2}{3}$;
- $\mathscr{D}_5$ passant par le point $E(2;-3)$ et de coefficient directeur $m = \frac{3}{5}$;
- $\mathscr{D}_6$ passant par le point $A(0;3)$ et de coefficient directeur $m = 0$;

1. Δ est la lettre grecque correspondant à D

FIGURE 5.2: Figure de l'exercice 5.1

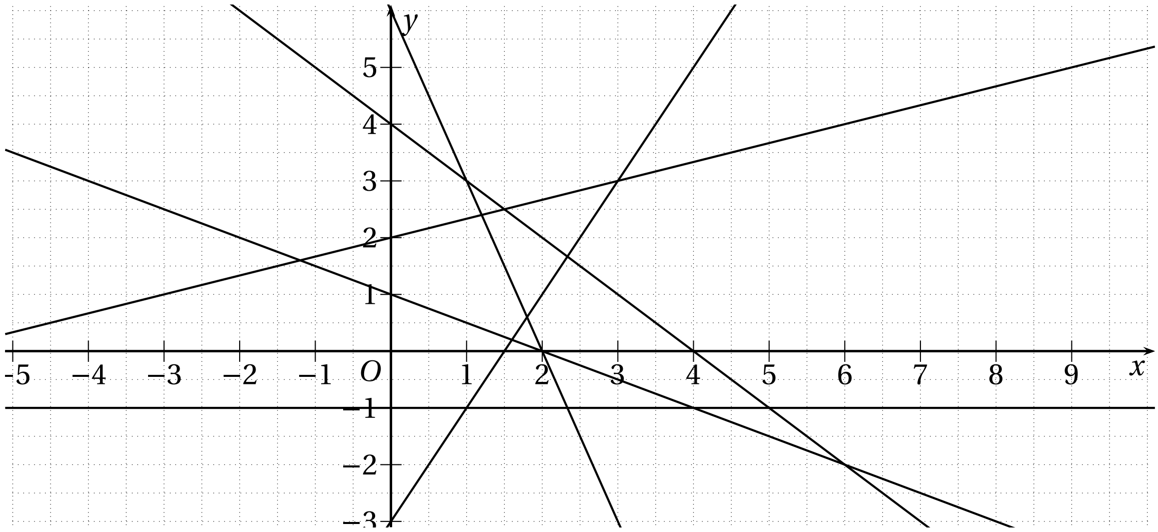
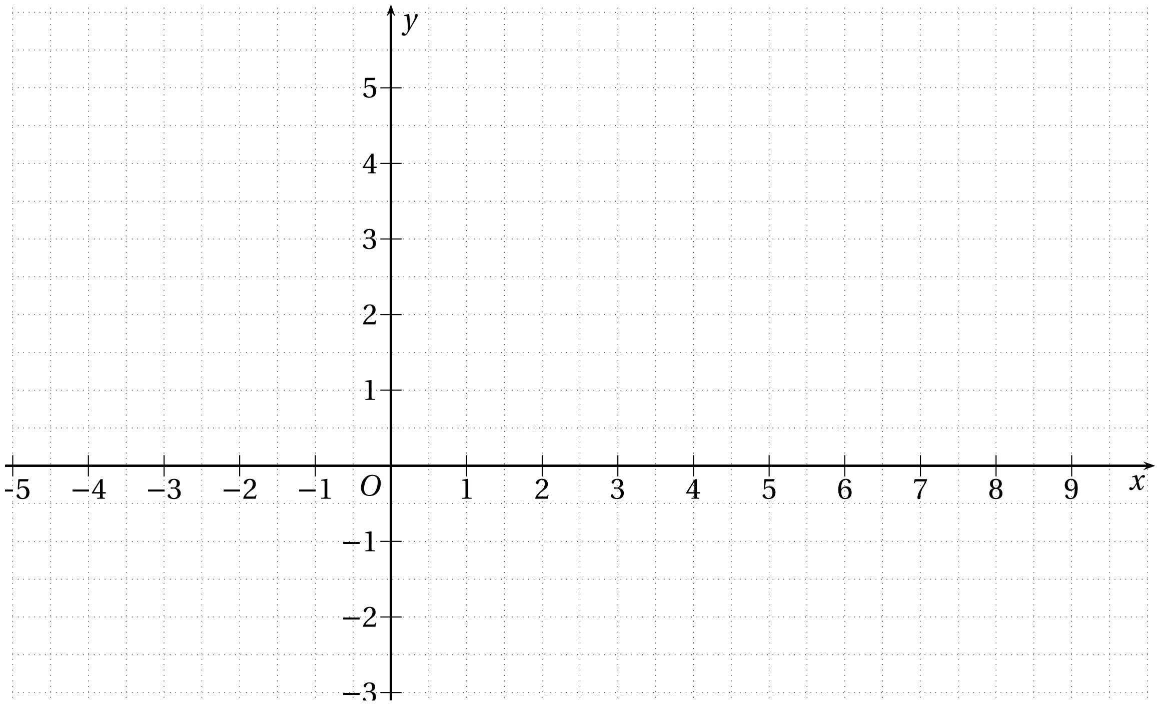


FIGURE 5.3: Figure de l'exercice 5.2

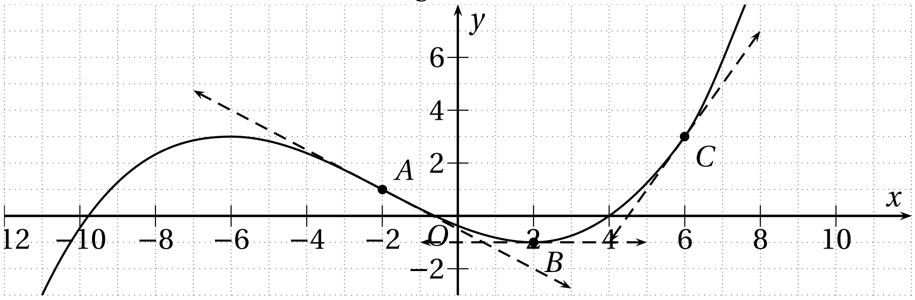


5.3.2 Lectures graphiques de nombres dérivés

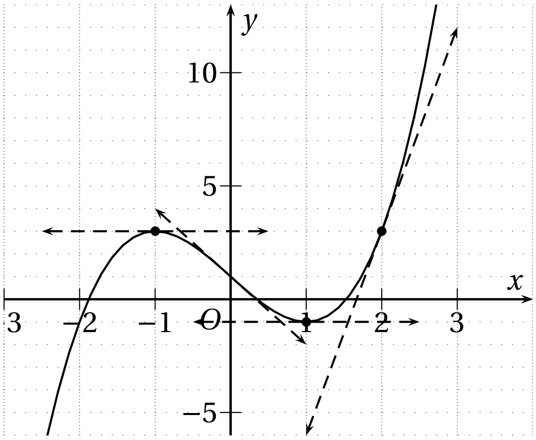
EXERCICE 5.3.
On donne sur la figure 5.4 page suivante la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

FIGURE 5.4: Figure de l'exercice 5.3



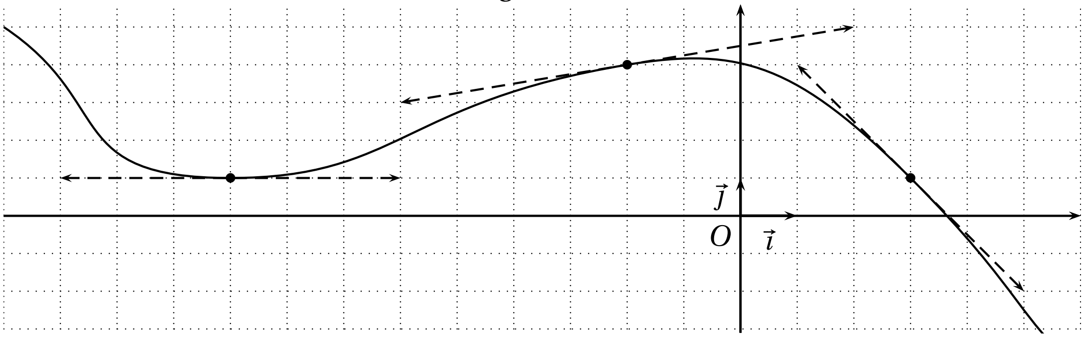
EXERCICE 5.4.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.



1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1\,;26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
   (b) En déduire $f'(-2)$.

EXERCICE 5.5.
On donne sur la figure 5.5 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

FIGURE 5.5: Figure de l'exercice 5.5



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

5.3.3 Tracés

EXERCICE 5.6.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3;0]$;
- $f(0)=-2$ et $f'(0)=0$;
- $f(3)=9$.

EXERCICE 5.7.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;9]$ ayant les propriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=3$ et $f'(1)=2$;
- $f(3)=6$ et $f'(3)=1$;
- $f(5)=7$ et $f'(5)=0$;
- $f(6)=6$ et $f'(6)=-4$.

EXERCICE 5.8.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ ayant les propriétés suivantes :

- $f(0)=1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3)=-1$ et $f(5)=-1$;
- $f'(2)=0$, $f'(3)=1$ et $f'(5)=-1$;
- pour tout $x\in[2;5]$, $f(x)<0$.

5.3.4 Calculs de nombres dérivés

EXERCICE 5.9.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction est dérivable et, le cas échant, déterminer par le calcul son nombre dérivé.

1. $f(x)=3x+7$ en -2.
2. $f(x)=x^2-2x$ en 3.
3. $f(x)=x^2+2x-1$ en -1.
4. $f(x)=2x^2-x+1$ en 4.
5. $f(x)=x^3+2x-1$ en 1.
6. $f(x)=\frac{1}{x}$ en 1.
7. $f(x)=\sqrt{x}$ en 2.

EXERCICE 5.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+2x+3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

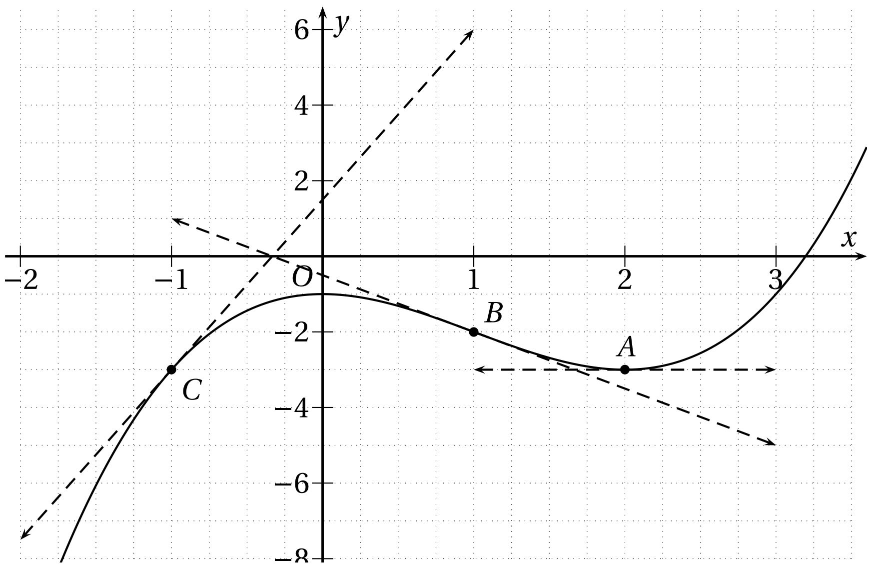
1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
2. Déterminer les nombres dérivés de f là où $\mathscr{C}$ coupe les axes.
3. Déterminer $f'(1)$.
4. Tracer dans un repère les tangentes à la courbe qu'on peut déduire des questions précédentes.
5. Tracer $\mathscr{C}$ dans ce même repère.

Devoir surveillé n°5

Nombre dérivé

L'énoncé est à rendre avec sa copie. *Penser à écrire son nom en entête.*
Le barème n'est qu'indicatif (le devoir est noté sur 15 points).

EXERCICE 5.1 (6 points)**.**
On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f. Sont aussi tracées les droites tangentes à la courbe aux points A, B et C.



Avec la précision permise par le graphique :

1. Donner, sans justifier, par lecture graphique $f(-1)$, $f(1)$ et $f(2)$
2. Donner, en justifiant, par lecture graphique $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

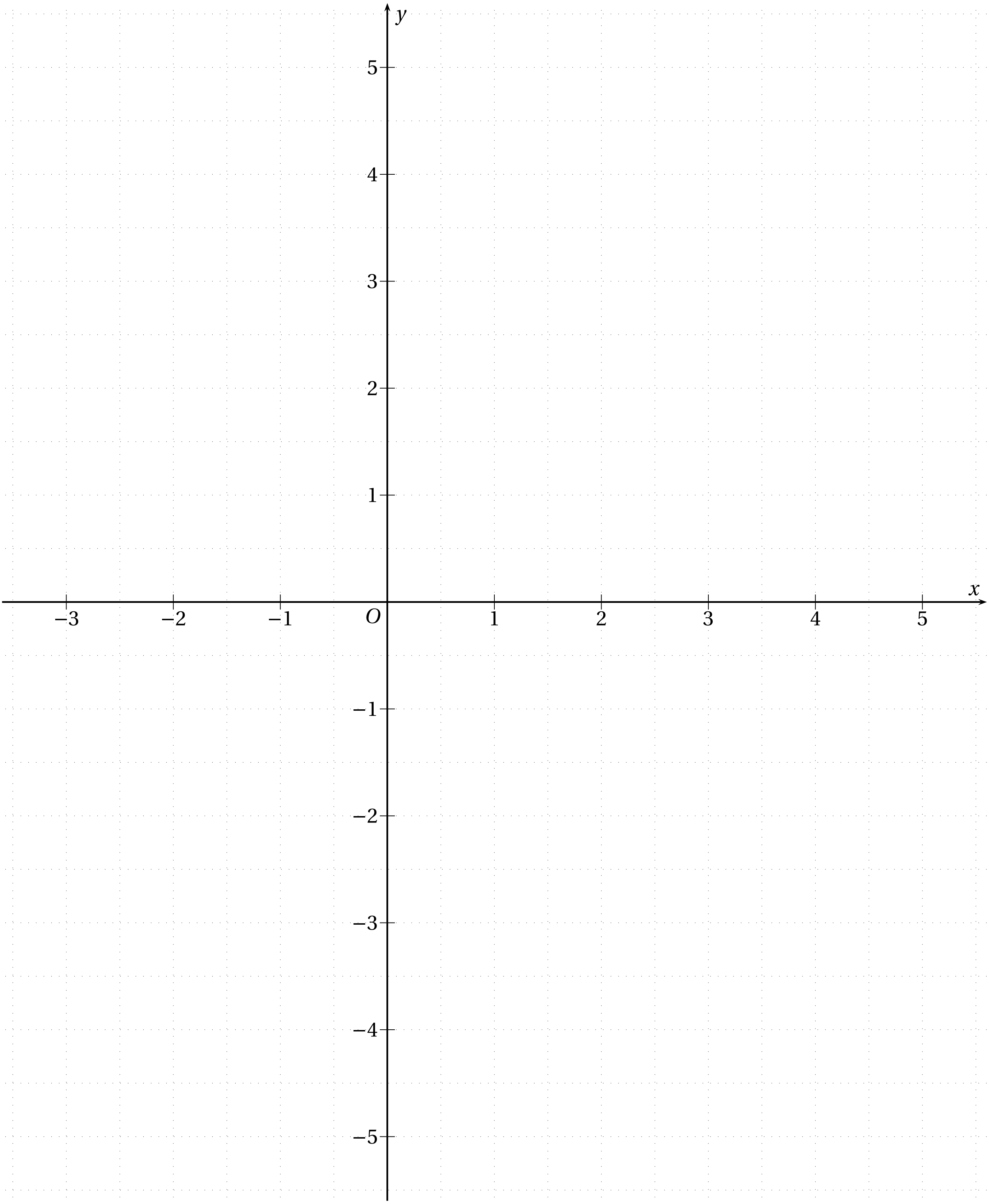
EXERCICE 5.2 (9 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x - 4$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
2. Déterminer le nombre dérivé de f en 0.
3. Déterminer $f'(1)$.
4. On donne $f'(-2) = -3$ et $f'(4) = 3$.
   (a) Tracer dans le repère de la figure 5.1 donnée en annexe, les tangentes à $\mathscr{C}$ qu'on peut déduire des questions précédentes ou des informations données dans l'énoncé.
   (b) Tracer $\mathscr{C}$ dans ce même repère.

FIGURE 5.1: Figure de l'exercice 5.2



Chapitre 6

Suites

Sommaire

6.1 Activités

ACTIVITÉ 6.1.
On donne ci-dessous le tableau d'effectifs, en million, de la population africaine depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Population	227,3	285	366,8	482,2	638,7	819,5	1011,2

1. Représenter cette évolution dans un repère.
2. Calculer les coefficients multiplicateurs permettant de passer de la population d'une décennie à celle de la suivante à partir de l'année 1950.
3. Un statisticien propose de modéliser la population africaine de la manière suivante : « À partir de 1950, tous les dix ans, la population africaine est multipliée par $1,28$ ».
   (a) Comment justifier sa démarche ?
   (b) Comparer le résultat obtenu par ce modèle en 2010 aux données réelles.
   Le modèle serait-il plus proche de la réalité avec un coefficient multiplicateur de $1,29$?
   (c) Que fait l'algorithme 6.1 page suivante ?
   (d) Le programmer sur sa calculatrice.

(e) Le modifier afin qu'il n'affiche que le dernier terme calculé.

(f) À l'aide de l'algorithme précédent, représenter cette évolution sur le même graphique.

(g) À l'aide de l'algorithme précédent, estimer au cours de quelle décennie la population africaine dépassera 3 milliards.

TABLE 6.1: Algorithme de l'activité 6.1

```
ENTREES
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 227.3
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n FAIRE
     u PREND LA VALEUR u*1.28
     AFFICHER k
     AFFICHER u
   FIN POUR
```

TABLE 6.2: Algorithme de l'activité 6.2

```
ENTREES
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 1
   s PREND LA VALEUR 0
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n
     u PREND LA VALEUR u*2
     s PREND LA VALEUR s+u
   FIN POUR
SORTIES
   AFFICHER s
```

ACTIVITÉ 6.2.
On ne sait pas si l'histoire suivante est vraie ou non.
Le Roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense.
Celui-ci répond (en ce temps là, on tutoyait les rois) :
« Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier ».
Le Roi sourit de la modestie de cette demande.
En réalité, cette demande était-elle vraiment modeste ?

1. On numérote les soixante-quatre cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier n ($1 \leqslant n \leqslant 64$), on note u_n le nombre de grains de blé que le Roi doit déposer dans la n-ième case.
   (a) Calculer u_1, u_2, ..., u_{10}.
   (b) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
   (c) Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{64}.
2. On donne l'algorithme 6.2 de la présente page.
   (a) Que fait cet algorithme ?
   (b) Entrer cet algorithme dans votre calculatrice.
   (c) Utiliser cet algorithme pour obtenir S, le nombre total de grains sur l'échiquier.
3. Sachant qu'un grain de blé pèse, en moyenne, 5×10^{-2} gramme et qu'un mètre cube de blé pèse, en moyenne, une tonne, quelles pourraient être les dimensions d'un grenier qui contiendrait le blé gagné par l'inventeur ?
   Le Roi avait-il raison de sourire ?

ACTIVITÉ 6.3.
Un bail est un contrat de location entre un locataire et un propriétaire.Traditionnellement sa durée est de trois ans.
On propose à un locataire deux types de bail :

- Contrat A : Le premier loyer est de 1 000 euros et il augmente chaque mois de 11,5 euros pendant la durée des trois ans.
- Contrat B : Le premier loyer est de 1 000 euros et il augmente chaque mois de 1 % pendant la durée des trois ans.

1. (a) Déterminer, avec éventuellement un algorithme programmé sur votre calculatrice, le loyer du dernier mois avec le contrat A.
   (b) Déterminer, avec éventuellement un algorithme programmé sur votre calculatrice, la somme des loyers que le locataire devrait payer avec le contrat A.
2. Mêmes questions avec le contrat B.
3. Déterminer quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire.

ACTIVITÉ 6.4.
Pour chacune des listes de nombres suivantes :

1. Conjecturer, dans chaque cas, une manière d'obtenir le terme suivant.
2. Conjecturer, dans chaque cas, une manière d'obtenir le vingtième terme.

a	b	c	d	e	f
0		1	$\frac{1}{1}$		100
1	-1	1,5	$\frac{3}{2}$	1	20
4	$\frac{1}{2}$	1,75	$\frac{7}{4}$	3	4
9	$-\frac{1}{3}$	1,875	$\frac{15}{8}$	5	0,8
16	$\frac{1}{4}$	1,9375	$\frac{31}{16}$	7	0,16
25	$-\frac{1}{5}$	1,96875	$\frac{63}{32}$	9	0,032

6.2 Généralités sur les suites

6.2.1 Petit historique sur les suites

Par Frédéric Demoulin

L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir d'un certain ARCHIMÈDE [1].
Dans son traité *La mesure du cercle*, pour trouver une valeur approchée de π, il avait eu la brillante idée de considérer des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle de rayon 1 : d'abord deux triangles équilatéraux, puis deux carrés, deux pentagones, etc.
Comme on peut le voir sur la figure 6.1, plus le nombre de côtés du polygone inscrit au cercle est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant inférieur. De même, plus le nombre de côtés du polygone circonscrit au cercle est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant supérieur. Les périmètres de ces polygones forment ainsi deux suites de nombres qui encadrent la circonférence du cercle, en l'occurence 2π.

1. Très brillant scientifique grec de Sicile, mathématicien, physicien et ingénieur (287 av. J.C. – 212 av. J.C.).

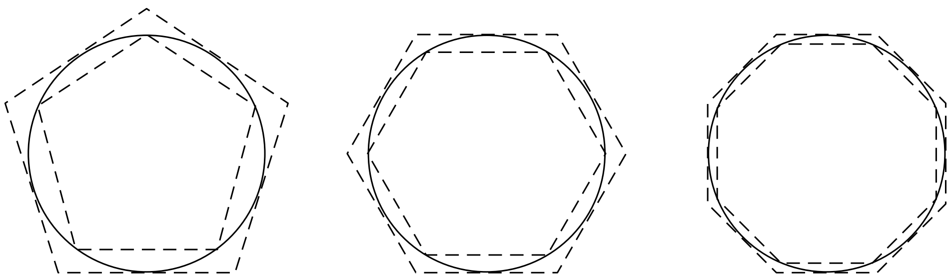


FIGURE 6.1: Exemples de polygones réguliers inscrits et circonscrits è un cercle : pentagone, hexagone et octogone.

Comme ARCHIMÈDE, de nombreux autres grands scientifiques (FIBONACCI, LUCAS, BERNOULLI, NEWTON, MOIVRE, CAUCHY, WALLIS, pour ne citer qu'eux…) vont, historiquement, s'intéresser aux suites dans le but d'approcher des valeurs numériques.
Au cours du XVII^{e} et du XVIII^{e} siècle, l'intuition et le génie de mathématiciens tels EULER ou BERNOULLI amènent à l'établissement de nombreux résultats relatifs aux suites, reléguant parfois au second plan les limites de validité de leurs découvertes.
Il faut donc attendre le début du XIX^{e} siècle pour qu'AUGUSTIN LOUIS CAUCHY [2] pose les fondements rigoureux de la théorie des suites. CAUCHY prend ainsi sa revanche sur les illustres mathématiciens du XVII^{e} et du XVIII^{e}. Deux événements décisifs viennent alors donner un élan supplémentaire aux suites : l'introduction de la notation indicielle [3] qui consiste à repérer chaque terme d'une suite par une même lettre affectée d'un indice et le point de vue de PEANO [4] qui définit une suite comme étant une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Plus récemment, dans la seconde moitié du XX^{e} siècle, le développement des outils de calcul va logiquement donner un nouvel essor à l'étude des suites. À l'heure actuelle, les domaines d'application des suites sont bien vastes : Analyse numérique, Mathématiques financières, Physique, Biologie, etc.

6.2.2 Définition et notations

Définition 6.1. Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n.
Ainsi $u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$

Exemples.

1. La suite des carrés des nombres entiers est 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; etc. On peut écrire ces termes sous la forme $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; etc. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$.
2. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geqslant 1$, on la note $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
3. La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-5}$ n'est définie que pour $n \geqslant 5$, on la note $(u_n)_{n\geqslant 5}$.

Remarques (Vocabulaire, notations).

2. Mathématicien français réputé pour sa finesse et sa rigueur (1789 – 1857).
3. La notation indicielle est due, semble-t-il, au grand mathématicien et astronome italien JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813).
4. Mathématicien italien, la définition axiomatique des entiers naturels porte son nom (1858 – 1932).

- n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n.
- *Attention :* (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.

6.2.3 Modes de génération d'une suite

Relevés chronologiques

Dans la « vie courante », les principales suites rencontrées sont obtenues par des relevés, en général chronologiques, en économie, ou des mesures en physique.
En mathématiques, nous nous intéresserons essentiellement aux suites définies mathématiquement (par des formules) dont l'objet sera la modélisation des suites précédentes et à l'étude de leurs propriétés mathématiques.

Définition par une formule explicite

Une suite *explicite* est une suite dont le terme général s'exprime en fonction de n. Elle est du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction. On a donc la définition suivante :

Définition 6.2. Soit f une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors définir une suite (u_n) de la façon suivante :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Remarques.
- On peut donc calculer directement n'importe quel terme de la suite à partir de l'indice n. C'est le côté agréable des suites explicites.
- Si f n'est définie que sur $[k; +\infty[$, avec $k > 0$, la suite n'est alors définie que pour $n \geqslant k$.

Exemples.

1. La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n - 1$. On a $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 2x - 1$. Par exemple $u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$.
2. Les suites de l'exemple précédent sont toutes des suites explicites. Les deux dernières sont définies, respectivement, pour $n \geqslant 1$ et pour $n \geqslant 5$.

Définition par récurrence

Une suite *récurrente* est définie par la donnée des premiers termes et la relation liant les termes de la suite (en général consécutifs). Plus généralement, on peut définir une suite récurrente de la façon suivante :

Définition 6.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de $u_0 \in I$ et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Exemple. $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ donne $u_0 = 4$; $u_1 = 2u_0 - 5 = 3$; $u_2 = 2u_1 - 5 = 1$; etc.

Remarques.

- Contrairement aux suites explicites, on ne peut pas, *a priori*, calculer un terme quelconque de la suite, sans avoir obtenu, avant, tous les termes le précédant.
  De nombreux exercices seront consacrés à obtenir, malgré tout, des moyens de calculer directement un terme donné, c'est-à-dire à transformer, lorsque c'est possible, la suite récurrente en une suite explicite.
- Toutes les fonctions f ne conviennent pas. Par exemple si $u_0 = 3$ et $f(x) = \sqrt{x-2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$, on a $u_1 = \sqrt{u_0 - 2} = \sqrt{1} = 1$. Par contre on ne peut pas calculer u_2, donc la suite n'est pas définie pour $n > 1$.

6.2.4 Représentation graphique d'une suite

Définition 6.4. Dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$.

Remarque. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}$. $u_{1,5}$ n'a, mathématiquement, pas de sens et donc le point $(1,5; u_{1,5})$ non plus.

6.2.5 Monotonie d'une suite

Une suite est une fonction particulière, on retrouve donc naturellement la notion de sens de variation pour une suite.

Définition 6.5. Soit (u_n) une suite. On dit que :
- la suite (u_n) est *croissante* si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- la suite (u_n) est *décroissante* si, pour tout entier n : $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- la suite (u_n) est *constante* ou *stationnaire* si, pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.

Définition 6.6. Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est *monotone* si son sens de variation ne change pas (elle reste croissante ou décroissante)

Remarque. On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Étudier la monotonie d'une suite c'est donc étudier ses variations.

6.3 Deux suites particulières : arithmétiques et géométriques

6.3.1 Suites arithmétiques

Définition et premières propriétés

Définition 6.7 (par récurrence)**.** On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + r \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

r est appelé *la raison* de la suite arithmétique.

Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

EXERCICE.
1. La suite formée par les nombres entiers naturels pairs est-elle une suite arithmétique ? Et celle formée par les nombres entiers naturels impairs ?
2. La suite définie par : pour tout n, $u_n = 3n - 2$ est-elle arithmétique ?
3. La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ est-elle arithmétique ?
4. Parmi les suites rencontrées dans les activités d'introduction, lesquelles sont arithmétiques ?

Propriété 6.1 (Formule explicite)**.** *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison r. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :*
$u_n = u_p + (n-p)r$
Et en particulier, avec $p = 0$:
$u_n = u_0 + nr$

Nous l'admettrons.

Variations d'une suite arithmétique

Propriété 6.2. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :*
- *si $r > 0$, (u_n) est* .... *;*
- *si $r < 0$, (u_n) est* .... *;*
- *si $r = 0$, (u_n) est* ....

Preuve. Pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$, ce qui donne le résultat. ♢

6.3.2 Suites géométriques

Définition et premières propriétés

Définition 6.8 (par récurrence)**.** On appelle *suite géométrique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathbb{R}$$

q est appelé *la raison* de la suite géométrique.

Remarques.
1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.
   Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.
   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.
2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

EXERCICE.
1. La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ est-elle géométrique ?
2. Parmi les suites rencontrées dans les activités d'introduction, lesquelles sont géométriques ?

Propriété 6.3 (Formule explicite)**.** *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :*
$u_n = q^{n-p} u_p$
Et en particulier, avec $p = 0$:
$u_n = q^n u_0$

Nous l'admettrons.

Variations d'une suite géométrique

On ne s'intéresse, en première, qu'aux variations de suites géométriques de raison positive.

Propriété 6.4. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \geqslant 0$. Alors, si $u_0 > 0$:*
- *si $q = 0$, (u_n) est .... pour $n \geqslant 1$*
- *si $0 < q < 1$, (u_n) est .... ;*
- *si $q = 1$, (u_n) est .... ;*
- *si $q > 1$, (u_n) est ....*

Preuve. Hormis le premier cas, trivial : pour tout $n \geqslant 0$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, ce qui donne le résultat. ◇

Il pourra être utile de plutôt retenir la propriété suivante qui permet d'étudier la monotonie de davantage de type de suites :

Propriété 6.5. *Soit $q \in \mathbb{R}$:*
- *Si $0 < q < 1$ alors $q^n > q^{n+1}$;*
- *Si $q > 1$ alors $q^n < q^{n+1}$.*

La preuve en sera faite en classe.

6.4 Exercices et problèmes

6.4.1 Exercices

EXERCICE 6.1.
Pour chacune des suites données ci-dessous :
- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $v_n = 5 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $w_n = (n+1)^2 - n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $x_n = \frac{3^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer les trois premiers termes.
2. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
3. Si elle est arithmétique ou géométrique calculer le terme de rang 100.

EXERCICE 6.2.
Les suites (u_n) de cet exercice sont arithmétiques.

1. La suite (u_n) est de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$. Déterminer r et u_0.

EXERCICE 6.3.
On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer u_{20}.

EXERCICE 6.4.
Les suites (u_n) de cet exercice sont géométriques.

1. La suite (u_n) est de raison $q = \frac{1}{2}$. On sait que $u_8 = -1$. Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est de raison q. On sait que $u_4 = 10$ et $u_6 = 20$. Déterminer q et u_0.

6.4.2 Problèmes

PROBLÈME 6.1.
Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

- *Premier contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail ;
- *Second contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

Question : Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

Indications :

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire celui du 36$^{\text{è}}$ mois.
3. Répondre à la question.

PROBLÈME 6.2.
Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 5 % chaque année. En 1990, il y avait 500 adhérents.
Question : le nombre d'adhérents peut-il doubler et, si oui, en quelle année ?

Indications :
Pour chaque année à partir de 1990 on note u_n le nombre d'adhérents l'année $1990+n$.

1. Quelle est la valeur de u_0 ? de u_1 ?
2. Préciser la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.
3. Étudier la monotonie de (u_n).
4. Utiliser la calculatrice pour répondre à la question.

PROBLÈME 6.3.
Monsieur X désire financer un voyage dont le coût est de 6 000€.
Pour ce faire, il a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.
Question : En quelle année aura-t-il assez d'argent pour financer son voyage ?

Indications :
On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2003+n)$, où n est un entier naturel. Ainsi, on a $C_0 = 2000$.

1. (a) Calculer le capital disponible le l$^{\text{er}}$ janvier 2004.
   (b) Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = C_n + 20000$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $C_n = 22000 \times (1{,}035)^n - 20000$.
3. Étudier la monotonie de la suite (C_n) puis, à l'aide de la calculatrice, répondre à la question.

PROBLÈME 6.4.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.
Question : En supposant que cette évolution se poursuive, comment va se comporter le nombre de clients sur le long terme ?

Indications :

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n.
   Justifier que $u_{n+1} = 0,5u_n + 400$, puis calculer u_1,u_2, u_3 et u_4.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0,5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
   (d) Étudier la monotonie de (u_n). Interpréter le résultat.
   (e) Calculer u_{100}, u_{1000} et u_{10000}.
   Que peut-on alors conjecturer concernant le nombre de clients du fournisseur ?

PROBLÈME 6.5.
Une ville comprenait 300 000 habitants au premier janvier 1950. On estime que la ville accueille tous les ans 2% de nouveaux arrivants et a un taux annuel de natalité de 3%. On constate curieusement un nombre fixe de décès et de départ de 800 personnes par an. On veut déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.
Question : À partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950 ?

Indications :

1. Quelle était la population estimée de la ville le premier janvier 1951 ?
2. On note p_n la population de la ville à l'année $1950 + n$.
   Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. On pose $q_n = p_n - 16000$.
   (a) Montrer que cette suite est une suite géométrique.
   (b) Exprimer q_n puis p_n en fonction de n.
4. Montrer que (p_n) est croissante.
5. En déduire, à l'aide de la calculatrice, la réponse à la question.

Devoir maison n°2

Une suite

À rendre pour le mardi 22 mars.

Le 1^{er} janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif du 1^{er} janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.

Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1^{er} janvier de l'année $(2005+n)$.

1. (a) Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3
   (b) Cette suite est-elle arithmétique ? Cette suite est-elle géométrique ?
2. Montrer que $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.
3. On pose $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Déterminer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Montrer que (v_n) est géométrique.
   (c) En déduire v_n en fonction de n.
   (d) En déduire u_n en fonction de n.
4. En supposant que cette évolution se poursuive de la même manière :
   (a) Étudier la monotonie de (u_n) et interpréter le résultat.
   (b) Déterminer le nombre d'employés le 1^{er} janvier 2016.
   (c) Déterminer en quelle année le nombre d'employés sera inférieur à 1 100.
   (d) Conjecturer comment va se comporter le nombre d'employés sur le long terme.

Chapitre 7

Dérivation

Sommaire

7.1 Activités

7.1.1 Fonction dérivée

ACTIVITÉ 7.1 (Plusieurs nombres dérivés)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Déterminer les valeurs des nombres dérivés en a dans les cas suivants :
   - $a = 0$;
   - $a = 1$;
   - $a = 2$.
2. Cas général : déterminer, en fonction de a, la valeur du nombre dérivé.

On obtient ainsi une fonction, qui dépend de f, qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x. Une telle fonction est appelée *fonction dérivée de f* et est notée f'. Ainsi, pour $f(x) = -x^2 + 4$, $f'(x) = \ldots\ldots$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ACTIVITÉ 7.2 (Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles)**.**
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes :

- $f(x) = k$;
- $f(x) = mx + p$;
- $f(x) = x^2$;
- $f(x) = x^3$.

7.1.2 Opérations sur les fonctions

On pourra ré-utiliser les résultats obtenus dans les activités précédentes.

Activité 7.3 (Produit d'une fonction par une constante)**.**
On pose $f(x) = x^2$, $g(x) = 3f(x) = 3x^3$ et $h(x) = \frac{f(x)}{4} = \frac{x^2}{4}$, toutes trois définies sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de chacune de ces fonctions.
2. Que constate-t-on ?

Activité 7.4 (Fonction dérivée d'une somme de fonctions et d'un produit de fonctions)**.**
Soient u, v et f trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.

1. (a) Déterminer $f'(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$.
   (b) Que constate-t-on ?
2. (a) Montrer que $f(x) = g(x) \times h(x)$ où g et h sont deux fonctions non constantes à déterminer.
   (b) Déterminer $g'(x)$ et $h'(x)$.
   (c) A-t-on $f'(x) = g'(x) \times h'(x)$?

7.1.3 Applications de la fonction dérivée

Activité 7.5 (Variations d'une fonction)**.**
Reprenons la fonction de l'activité 7.1 page précédente : $f(x) = -x^2 + 4$ et rappelons que le nombre dérivé en x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x.

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice graphique et par lecture graphique, les variations de f en fonction de x.
2. Comment cela se traduit-il pour les coefficients directeurs des tangentes à la courbe ?
3. En déduire un lien entre les variations de f et une caractéristique de la fonction dérivée f'.

Activité 7.6 (Extremum local)**.**
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser le tableau des variations de f, en faisant apparaître une ligne indiquant le signe de f'.
4. Qu'observe-t-on en -1 et en 1 pour f ? Comment cela se traduit-il pour f' ?

On dit que f admet en -1 et en 1 des extremums locaux.

7.2 Bilan et compléments

7.2.1 Fonction dérivée

Définition 7.1. On dit qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre de cet ensemble et on note f' la fonction qui a tout nombre x de cet ensemble associe le nombre dérivé de f en x. Cette fonction s'appelle la *fonction dérivée de f*.

On admettra [1] que les fonctions usuelles ont les fonctions dérivées suivantes :

1. Certaines démonstrations ont été faites en activité ou seront faites en exercice

Propriété 7.1. *Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :*

Fonction f	**définie sur**	**Fonction dérivée f'**	**définie sur**
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$

Remarque. Si l'on remarque que $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et que $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$, on a alors : $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ a pour fonction dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
Ainsi, pour obtenir la fonction dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, on peut appliquer l'une ou l'autre formule :

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{2}{x^{2+1}} = -\frac{2}{x^3} \text{ ou } f'(x) = nx^{n-1} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

7.2.2 Opérations sur les fonctions

Propriété 7.2. *Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I.*

Fonction	**Fonction dérivée**	**Exemple**
ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'	Si $f(x) = 4x^3$ alors $f'(x) = 4 \times \left(3x^2\right) = 12x^2$
$u + v$	$u' + v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ avec $x \neq 0$
$\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) \neq 0$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{3x^2+2x+1}$ alors $f'(x) = -\frac{6x+2}{(3x^2+2x+1)^2}$
$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ alors $f'(x) = \frac{(2)(3x+2)-(2x-1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$

Remarque. Seules les deux premières formules sont intuitives, les autres sont à apprendre par cœur. En particulier, comme on l'a vu en activité, la dérivée d'un produit (ou d'un quotient) n'est pas égale au produit (ou au quotient) des dérivées.

Preuve.

- Montrons que $(ku)' = ku'$

$$\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = \frac{k[u(a+h) - u(a)]}{h} = k\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\dfrac{ku(a+h) - ku(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $k\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$, c'est-à-dire $ku'(a)$

- Montrons que $(u + v)' = u' + v'$

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\dfrac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$, c'est-à-dire $(u' + v')(a)$

- Montrons que $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} = \frac{\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h} = \left(\frac{u(a)-u(a+h)}{h}\right)\frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

Lorsque que h *tend* vers 0, $\frac{u(a)-u(a+h)}{h}$ *tend*, par définition, vers $-u'(a)$ et $\frac{1}{u(a+h)u(a)}$ *tend* vers $\frac{1}{u^2(a)}$, donc $\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h}$ *tend* vers $-\frac{u'(a)}{u^2(a)}$

- On admettra que $(uv)' = u'v + uv'$
- Montrons que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

On a vu que $(uv)' = u'v + uv'$, or $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, donc $\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

◊

7.2.3 Applications de la fonction dérivée

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse x est la droite la plus proche de la courbe au voisinage du point de la courbe d'abscisse x. Il est *naturel* de penser que lorsque la tangente *monte*, la courbe *monte* et que lorsque la tangente *descend*, la courbe *descend*, et réciproquement ou, plus mathématiquement, que lorsque la fonction affine dont la tangente est la représentation graphique est croissante (respectivement décroissante), f est aussi croissante (respectivement décroissante) et réciproquement. Or la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de son coefficient directeur, ici $f'(x)$. Ainsi, étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x.
On admettra donc le résultat suivant :

Théorème 7.3. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée*
- $f'(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *croissante sur* I
- $f'(x) \leqslant 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *décroissante sur* I
- $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *constante sur* I

On admettra aussi la propriété suivante :

Propriété 7.4. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée*
Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante)

Remarque. On notera qu'on n'a pas l'équivalence ($\Leftrightarrow$) dans ce cas, une fonction pouvant être strictement croissante avec une dérivée qui s'annule seulement en quelques valeurs. C'est le cas, par exemple, de la fonction cube, dont la dérivée s'annule seulement en 0.

Par ailleurs, lorsque la fonction change de sens de variation en a, on dit qu'elle admet un extremum local en a (minimum ou maximum). On a donc :

Propriété 7.5. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée.*
f' s'annule et change de signe en $a \Leftrightarrow f$ admet un extremum local en a

On l'admettra.
On a un maximum lorsque $f'(x)$ est positive avant a et négative après, et un minimum lorsque $f'(x)$ est négative avant a et positive après.

Remarque. *Local* signifie qu'aux alentours de a ce sera un extremum mais, qu'ailleurs, il se peut que f prenne des valeurs supérieures ou inférieures à cet extremum comme on a pu le voir dans l'activité 7.6 page 70.

7.3 Exercices

7.3.1 Technique

EXERCICE 7.1.
Montrer que la fonction racine carrée est dérivable en tout nombre appartenant à $]0;+\infty[$ mais pas en 0

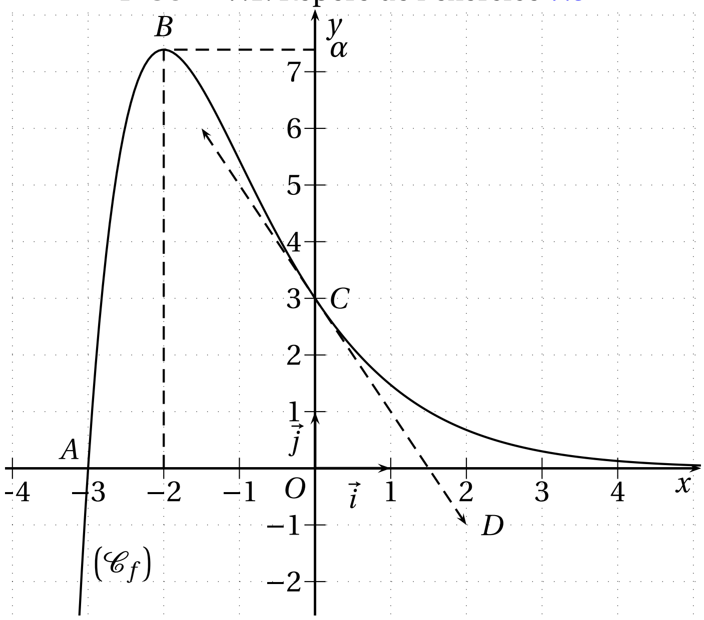
EXERCICE 7.2.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
2. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
3. $f(x) = (2x+3)(3x-7)$
4. $f(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$
5. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$
6. $f(x) = x^3\left(1+\sqrt{x}\right)$
7. $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$
8. $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$
9. $f(x) = \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

7.3.2 Lectures graphiques

EXERCICE 7.3.
La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de la figure 7.1 de la présente page est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,+\infty[$.

FIGURE 7.1: Repère de l'exercice 7.3



On donne les renseignements suivants :

- les points $A(-3;0)$, $B(-2;\alpha)$ où $\alpha \approx 7,39$ et $C(0;3)$ sont des points de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en $+\infty$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$;

- la droite tangente à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en son point C passe par le point $D(2\,;-1)$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

1. $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
2. Pour tout x élément de l'intervalle $[-2\,;+\infty[$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.
3. Soit une fonction g telle que $g' = f$ sur l'intervalle $[-4\,;+\infty[$, alors la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$.

EXERCICE 7.4.

On a représenté sur la figure ci-dessous dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $O(0\,;0)$ et $A(2\,;2)$.
La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques page suivante, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.
3. Une des représentations graphiques page ci-contre, représente une fonction h telle que $h' = g$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.

Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

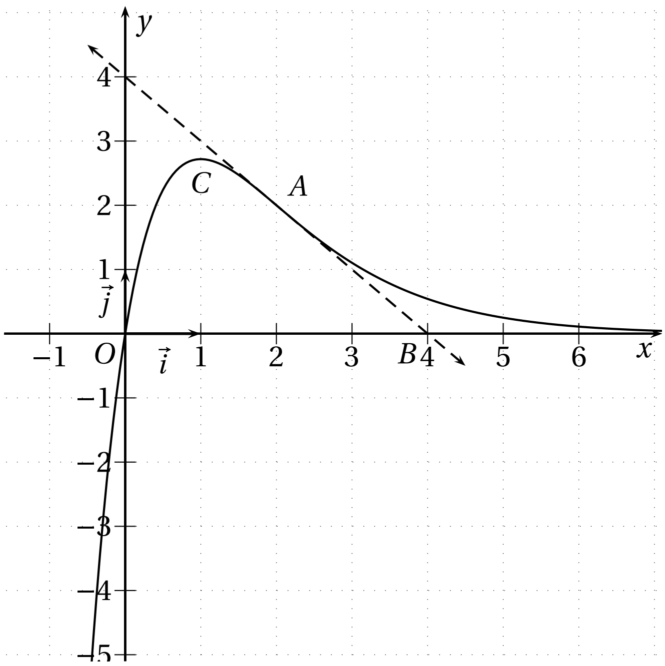
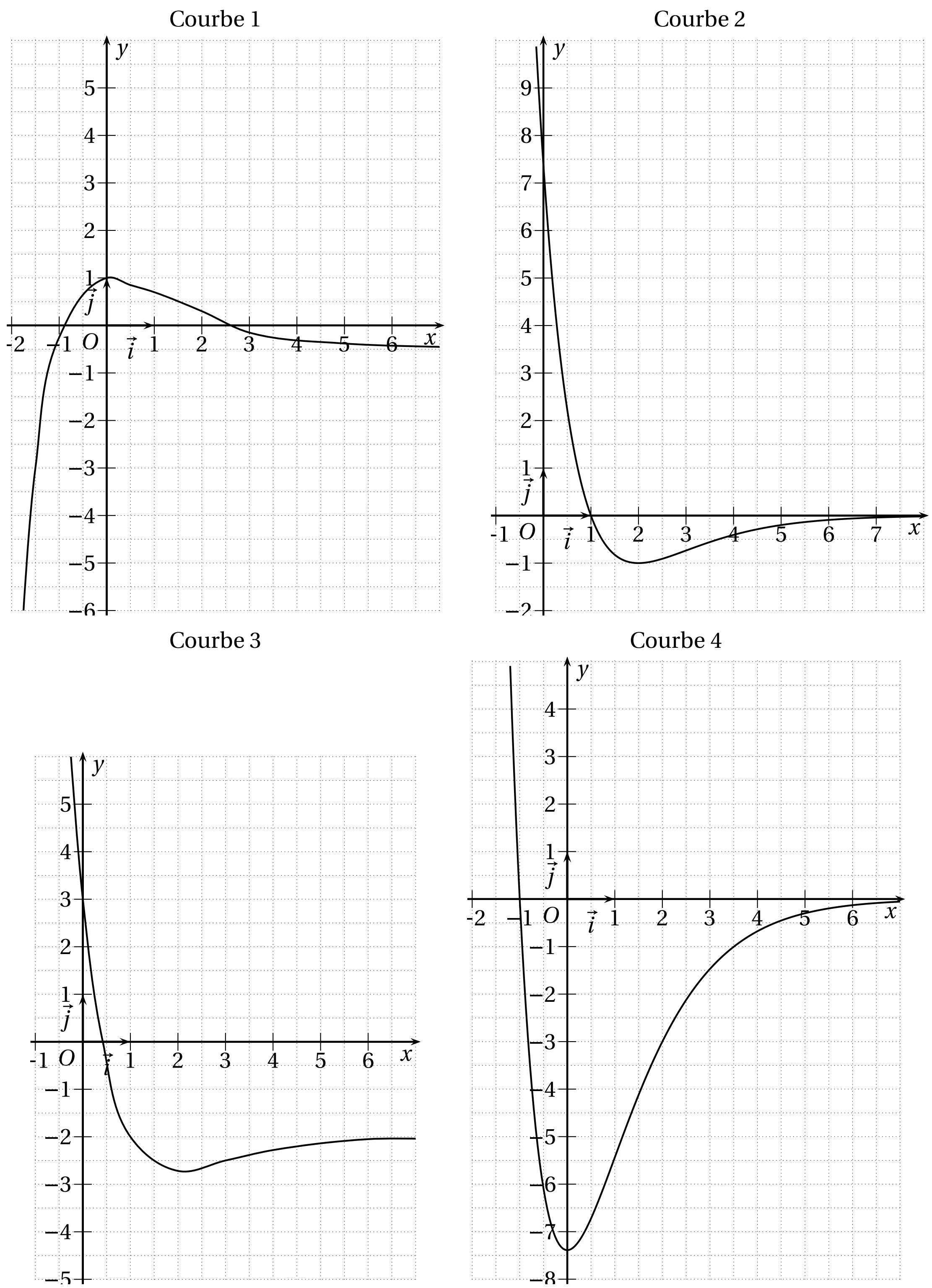
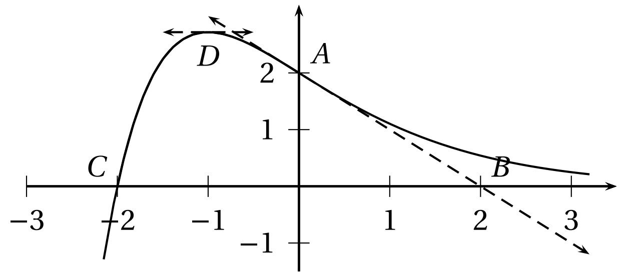


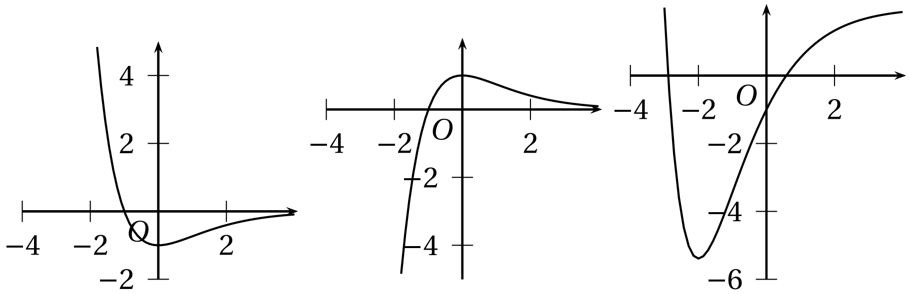
FIGURE 7.2: Courbes de l'exercice 7.4



EXERCICE 7.5.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonornal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\,;\,2)$ et $C(-2\,;\,0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la courbe associée à Ia fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix



EXERCICE 7.6.
La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$.
Soit A le point du plan de coordonnées $(-1\,;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1\,;5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 page suivante représente la fonction f'. Laquelle? *Justifier votre réponse.*

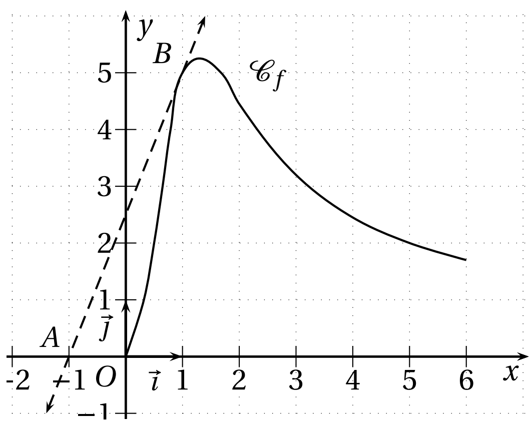


FIGURE 7.3: Courbes de l'exercice 7.6

Figure 1

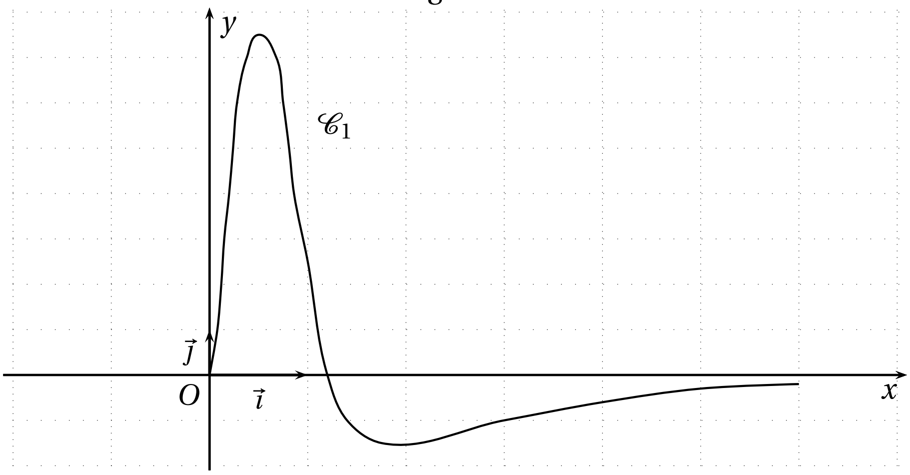


Figure 2

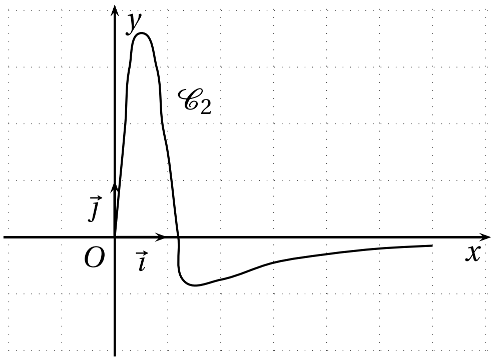
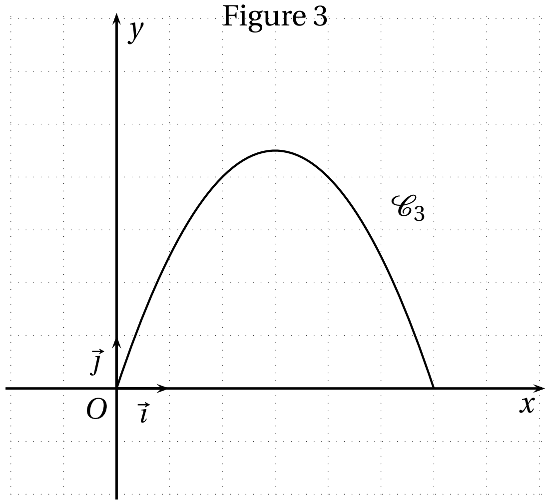


Figure 3



7.3.3 Études de fonctions

EXERCICE 7.7.
Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f en y indiquant le signe de la fonction dérivée.
4. Montrer que f admet un extremum.

EXERCICE 7.8.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.
2. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1;3]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 7.9.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T, les tangentes parallèles à l'axe des abscisses puis $\mathscr{C}$.

EXERCICE 7.10.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée g'.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer si g admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction g

EXERCICE 7.11.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation grahique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}$ en B.
4. Tracer dans un même repère T_A, T_B et $\mathscr{C}$.

EXERCICE 7.12.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. Faire de même pour g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-2;2]$ et on prendra un pas de 0,5).
   (b) À l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

EXERCICE 7.13.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau des variations de f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
3. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4;4]$.

EXERCICE 7.14.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de f.
2. Calculer la dérivée g' de g, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;5]$ et on prendra un pas de 0,25).
   (b) À l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersections entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

EXERCICE 7.15.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.
2. Dresser les tableaux des variations des fonctions f et g.
3. Tracer les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;3]$).
4. (a) Factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$.
   (b) Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

EXERCICE 7.16.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -3.

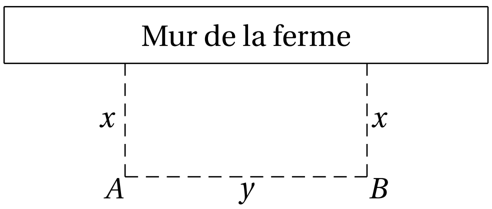
7.3.4 Problèmes

PROBLÈME 7.1.
On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm^2
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de l
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f. Tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;2]$.
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

PROBLÈME 7.2.
Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?
La figure ci-dessous représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distace entre les deux piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$).

1. Sachant que l'aire du poulailler est de 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \frac{2x^2+392}{x}$
3. Calculer la dérivée l' de l. en déduire le tableau des variations de l.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelle la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.

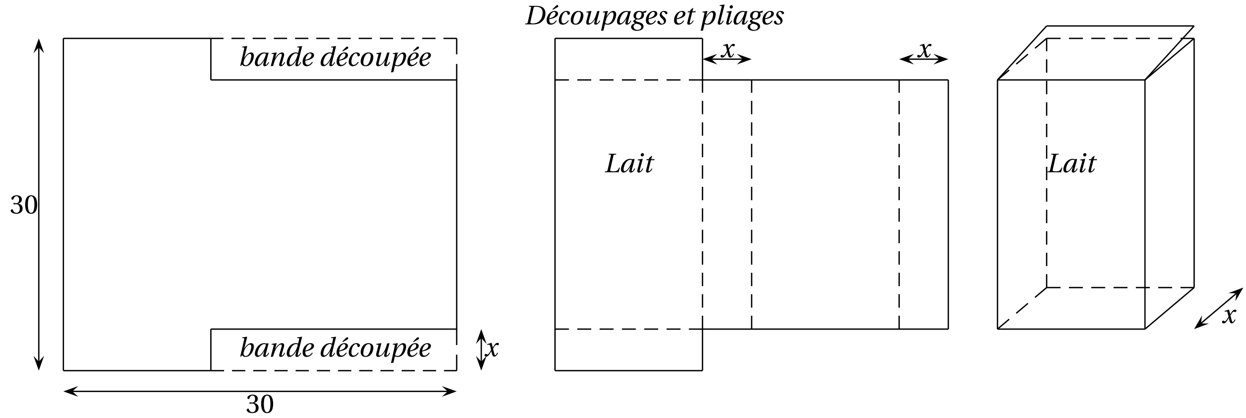


PROBLÈME 7.3. 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$

   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$. Dresser le tableau des variations de f.
   (b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.
   (c) Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   (d) Tracer Δ et la représentation graphique de f pour $x \in [0;20]$.

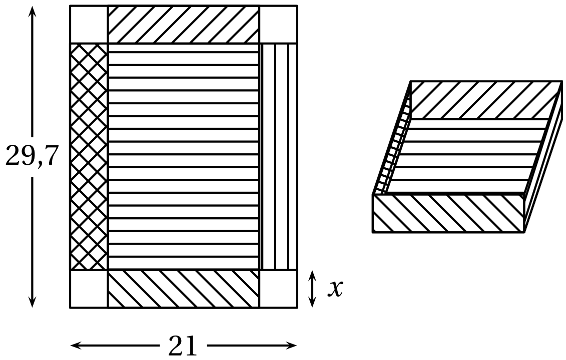
2. Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir la figure de la présente page). Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.
   (a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   (b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.

Découpages et pliages



PROBLÈME 7.4.
On dispose d'une feuille de dimensions 21 cm × 29,7 cm avec laquelle on veut fabriquer une boite sans couvercle. Pour cela on découpe aux quatre coins de la feuille un carré de côté x. On obtient le patron de la boite. On se propose d'étudier le volume de la boite en fonction de x.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. On appelle $V(x)$ le volume de la boite.
   (a) Montrer que $V(x) = x(29,7-2x)(21-2x)$.
   (b) Étudier les variations de V.
   (c) En déduire la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) le volume de la boite est maximum. *On donnera le(s) résultat(s) au millimètre.*



PROBLÈME 7.5.
Quel doit être le format (hauteur, rayon) d'une boite de conserve cylindrique pour que, pour un volume donné, la quantité de métal pour la concevoir, qu'on supposera proportionnelle à sa surface, soit minimale.

PROBLÈME 7.6.
Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique d la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-2}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.
3. Déterminer l'abscisse de l'autre point de $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale.

PROBLÈME 7.7.
Une parabole $\mathscr{P}$ admet, dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, une équation du type : $y = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$. Déterminer les coefficients a, b et c sachant que $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnées 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x+2$ pour tangente.
Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses.

PROBLÈME 7.8.
Une entreprise fabrique x portes blindées par jour, x variant de 0 à 120. On estime que le coût total de fabrication, noté $C(x)$, est donné, en euros, par : $C(x) = 0,001x^3-0,1x^2+95x+1500$.
La recette de l'entreprise obtenue par la vente de x portes, notée $R(x)$, en euros, est donnée par : $R(x) = 228x$.
On suppose que chaque porte est vendue.

1. Étude de la fonction bénéfice
   (a) Exprimer $B(x)$ en fonction de x.

(b) Calculer $B'(x)$ pour tout x de $[0\,;120]$.

(c) Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction B.

(d) À l'aide du tableau de variation et d'un tableau de valeurs donné par la calculatrice, donner les arrondis au dixième des solutions de l'équation $B(x) = 0$.

En déduire le nombre de portes vendues pour que la fabrication soit rentable. Justifier votre réponse.

(e) Pour quel nombre de portes vendues, le bénéfice est-il maximal ? Justifier votre réponse.

2. Courbe représentative de la fonction B

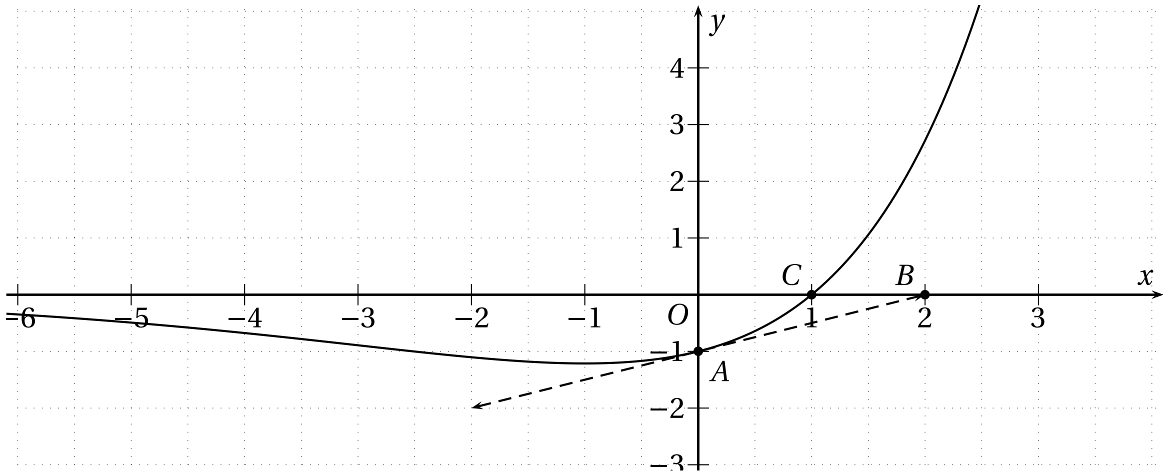
(a) Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction B.

(b) Vérifier graphiquement vos réponses aux questions d) et e) de la partie 1.

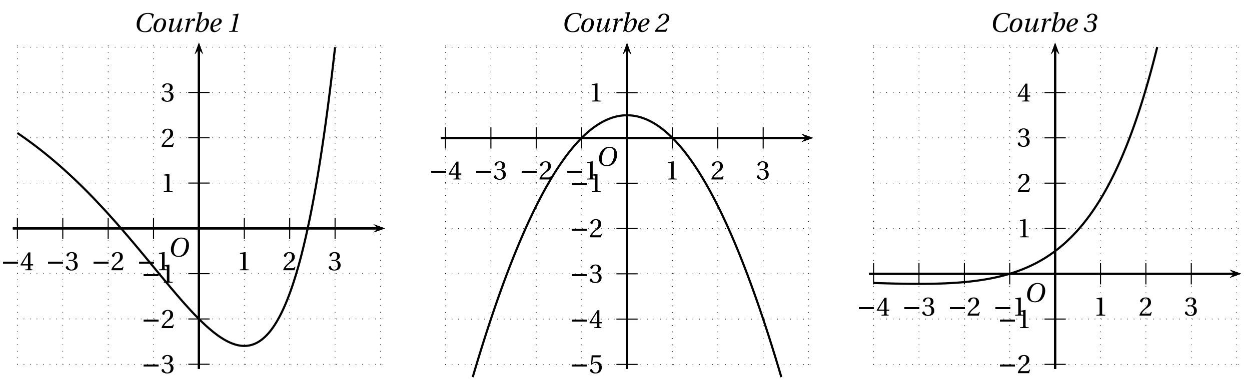
Devoir surveillé n°6

Dérivation

EXERCICE 6.1 (7 points)**.**
Dans le repère ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe passe par les points $A(0\,;-1)$ et $C(1\,;0)$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente à la courbe en A passe par le point $B(2\,;0)$.



1. Sans justifier déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
2. En justifiant déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$.
3. Une des courbes ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
4. Une des courbes ci-dessous représente une fonction g telle que $g' = f$. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.



EXERCICE 6.2 (7 points).
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par

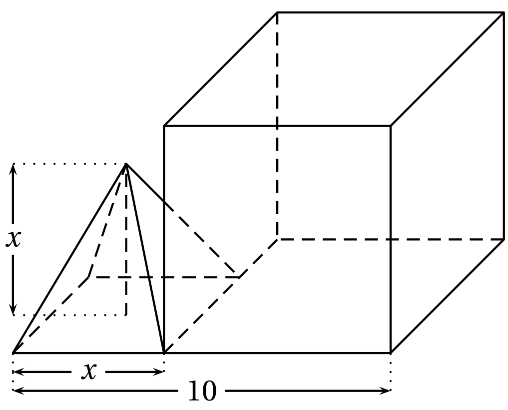
$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Étudier les variations de f et dresser le tableau des variations de f en y indiquant les valeurs exactes des extremums locaux.
3. Déterminer les abscisses des points de la courbe de f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

EXERCICE 6.3 (6 points).
On rappelle que le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Au centre d'un hall d'exposition, on doit monter deux stands en toile réservés à l'accueil des visiteurs.
Le premier a la forme d'une pyramide régulière à base carrée et le second celle d'un cube ; ils sont accolés à la base par un côté et s'étalent sur une longueur totale de 10 m.

Pour des raisons esthétiques, le responsable de la décoration exige que la hauteur de la pyramide soit égale au côté de sa base et souhaite que l'aire totale occupée au sol par ces deux stands soit la plus petite possible.
Le responsable technique souhaite que le volume total de ces deux stands soit le plus petit possible pour permettre une économie d'énergie.



Ils s'adressent à l'ingénieur en chef (c'est vous) pour qu'il trouve la meilleure solution.

On note x la longueur, et donc la hauteur, en mètres de la pyramide, x étant compris entre 0 et 10.
On note $\mathscr{A}$ la fonction qui à x associe l'aire totale occupée au sol par les deux stands et $\mathscr{V}$ la fonction qui à x associe leur volume total, ces deux fonctions étant définies sur $[0\,;10]$.

1. (a) Calculer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.
   (b) Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$, dresser son tableau de variation et préciser son minimum sur $[0\,;10]$.
2. (a) Montrer que $\mathscr{V}(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 30x^2 - 300x + 1\,000$.
   (b) Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{V}$, dresser son tableau de variation et préciser son minimum sur $[0\,;10]$ arrondi à l'unité.
3. Vous êtes l'ingénieur : quelle valeur entière de x choisiriez-vous ? Expliquer votre choix.

Chapitre 8

Probabilités

Sommaire

8.1 Activités

ACTIVITÉ 8.1 (Fille ou garçon)**.**
On se propose d'utiliser le tableur pour résoudre le problème suivant :
« Monsieur X est invité chez des nouveaux amis qu'il sait très joueurs mais qu'il connait à peine. Au cours de la conversation il apprend que ses nouveaux amis ont deux enfants mais il oublie de demander leur sexe. Soudain l'un de ces deux enfants entre dans la salle. Il s'agit d'un garçon.
"– Vous avez donc un garçon et … ? demande-t-il
– Je parie que tu ne devineras pas. Sur quoi mises-tu ? un gars ? une fille ?"
Sur quoi doit miser monsieur X pour maximiser ses chances de clore le bec à ces amis un peu lourds avant de prendre congé ? »

On suppose pour simplifier les choses qu'un enfant sur deux qui nait est une fille et l'autre un garçon.

1. Que *conjecturez-vous* a priori quant au sexe de l'autre enfant ?
2. On se propose d'utiliser la colonne A pour simuler le sexe du premier enfant, la colonne B pour celui du second enfant et la colonne C pour compter le nombre de garçons.
   Proposer une formule utilisant la fonction ALEA (ou ALEA.ENTRE.BORNES avec Calc) permettant de simuler le sexe d'un enfant dans les cases A1 et B1 et une formule adaptée pour compter le nombre de garçons de la fratrie dans la case C1.
   Demander au professeur de valider les deux formules avant d'aller plus loin.

3. « Tirer la poignée » verticalement de façon à simuler 100 familles de deux enfants.
4. Dans la plage F4 : J5 dresser un tableau de la forme suivante :

Nombre de garçons	0	1	2	total
Effectif				

   où les cases *Effectif* seront automatiquement complétées par le tableur (utiliser la fonction NB.SI)
5. En appuyant plusieurs fois sur la touche F9 (Excel) ou CTRL+MAJ+F9 (Calc), indiquer autour de quels effectifs semblent osciller les types de famille.
6. Puisque l'un des enfants est un garçon, quel type de famille doit-on exclure ?
   En observant les types de famille restants, déterminer sur quel sexe doit miser Monsieur X et dans quelle proportion il a des chances de gagner son pari.
   Votre conjecture est-elle validée ?

ACTIVITÉ 8.2 (Arbres pondérés)**.**
On dispose :
- d'une urne contenant quatre boules insdiscernables au toucher dont trois boules bleues portant respectivement les numéros 1, 2 et 3, notées b_1, b_2 et b_3, et une boule rouge unique, notée r ;
- d'un jeu de six cartes identiques portant chacun un chiffre en couleur : une carte avec un chiffre 1 en vert, une carte avec un chiffre 2 en rouge, une carte avec un chiffre 2 en bleu, une carte avec un chiffre 2 en vert, une carte avec un chiffre 3 en rouge et une carte avec un chiffre 3 en bleu.

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On prélève de façon équiprobable une boule dans l'urne puis une carte du jeu. On note, dans l'ordre, la couleur de la boule extraite et le numéro inscrit sur la carte ».

On note Ω l'ensemble de toutes issues possibles et $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

1. Construire l'arbre des possibles et en déduire Ω. Est-on dans une situation qu'équiprobabilité ?
2. (a) Construire un arbre, que nous appelerons « modèle intermédiaire », qui prenne en compte, pour la boule extraite, non seulement sa couleur mais aussi son numéro et, pour la carte, non seulement le numéro mais aussi sa couleur.

   (b) A-t-on équiprobabilité entre chacun des chemins ?

   (c) En déduire les probabilités de chacun des évènements élémentaires de Ω.
   O*n présentera les résultats sous forme de tableau du type :*

ω_i	ω_1	ω_2	...
$p(\omega_i)$	$p(\omega_1)$	$p(\omega_2)$	...

   Remarque. Lorsqu'on détermine pour chaque évènement élémentaire sa probabilité, on dit qu'on décrit la loi de probabilité.
3. L'arbre du modèle intermédiaire, nous ramenant à une situation d'équiprobabilité, nous a permis de décrire la loi de probabilité. Cependant il est un peu lourd. Essayons de l'alléger.

   (a) Refaire l'arbre des possibles en ajoutant devant chaque éventualité des branches multiples : autant qu'on en peut trouver sur le modèle intermédiaire qui mènent à cette éventualité.

   (b) Refaire l'arbre des possibles de la manière suivante :

i. Remplacer ces branches multiples par des branches simples mais en indiquant le nombre de branches qu'il devrait y avoir. On obtient alors un arbre pondéré (chaque branche ayant un poids).

ii. Combien de chemins du modèle intermédiaire terminaient sur l'évènement élémentaire $(r,2)$? Comment pourrait-on retrouver ce nombre à partir de l'arbre précédent ?

(c) Refaire l'arbre des possibles de la manière suivante :

i. Pondérer chaque branche, non plus avec le nombre de branches multiples qu'il devrait y avoir, mais avec le quotient de ce nombre par le nombre total de branches qu'il devrait y avoir à ce même niveau.

ii. Quelle est la probabilité de l'évènement élémentaire $(r,2)$? Comment pourrait-on retrouver cette probabilité à partir de l'arbre précédent ?

ACTIVITÉ 8.3 (Loi des grands nombres)**.**
On donne l'algorithme suivant, écrit en langage courant :

```
ENTREES
  FACE, LANCERS : Nombres entiers naturels
INITIALISATION
  EFFECTIF prend la valeur 0
INSTRUCTIONS
  Pour K variant de 1 a Lancers faire :
    DE prend la valeur nombre_aleatoire_entre_1_et_6
    Si DE = FACE alors EFFECTIF prend la valeur EFFECTIF +1
  Fin Pour
  FREQUENCE = EFFECTIF / LANCERS
SORTIE
  FREQUENCE
```

On se propose de l'étudier puis de l'étoffer et enfin de le modifier pour qu'il fasse autre chose.

Partie A : Étude de l'algorithme

1. Que fait cet algorithme ?
2. Le programmer sur Algobox et le faire fonctionner pour la face de votre choix, en faisant plusieurs essais à chaque fois, avec :
   - $Lancers = 10$
   - $Lancers = 100$
   - $Lancers = 1\,000$
   - $Lancers = 10\,000$

   Qu'observe-t-on ?
3. (a) Le modifier pour qu'il calcule la *fréquence* d'apparition de la *face* à chaque valeur de k et affiche dans un repère le point d'abscisse k et d'ordonnée la *fréquence* nouvellement calculée.

   (b) Le faire fonctionner pour un certain nombre de lancers, comme à la question 2. Qu'observe-t-on ?

Partie B : Modification de l'algorithme
Modifier l'algorithme pour qu'il affiche :

1. D'abord, en seule sortie, à la place de la *fréquence* de l'algorithme originel, la *moyenne* des résultats obtenus après un certain nombre de *lancers* ; le faire fonctionner pour un certain nombre de lancers, comme à la question 2 ; qu'observe-t-on ?

2. Ensuite, comme dans la partie précédente, dans un repère, pour chaque valeur de k, le point d'abscisse k et d'ordonnée la *moyenne* nouvellement calculée ; le faire fonctionner pour un certain nombre de lancers, comme à la question 2 ; qu'observe-t-on ?

Partie C : Une situation
On s'intéresse à la situation suivante : « On lance un dé à 6 faces, équilibré, et on marque :

- Un point si on obtient 1 au dé ;
- Deux points si on obtient 2 au dé ;
- Trois points si on obtient 3 ou 4 au dé ;
- Quatre points si on obtient 5 ou 6 au dé ».

On cherche à estimer le nombre de points qu'on peut espérer obtenir en moyenne.

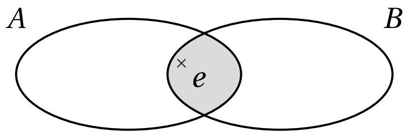
1. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il puisse simuler la situation et le faire fonctionner pour conjecturer le nombre de points qu'on obtient en moyenne.
2. (a) Décrire l'univers des possibles Ω et la loi de probabilité.
   (b) Sur un grand nombre de lancers, vers quelle fréquence va tendre chacun des évènements élémentaires ?
   (c) En déduire vers quelle valeur va tendre la moyenne.

8.2 Rappels

Ce paragraphe ne comportant que des rappels de Seconde, les exemples seront limités et les preuves des théorèmes et propriétés ne seront pas refaites.

8.2.1 Vocabulaire des ensembles

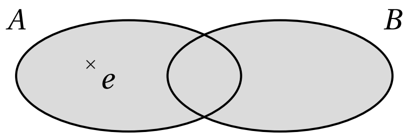
Définition 8.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

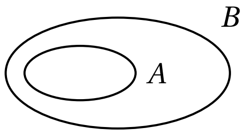
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 8.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

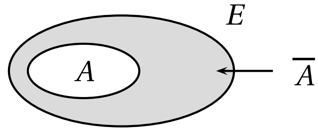
Définition 8.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note alors $A \subset B$ (« A inclus dans B ») ou $B \supset A$ (« B contient A »).



On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

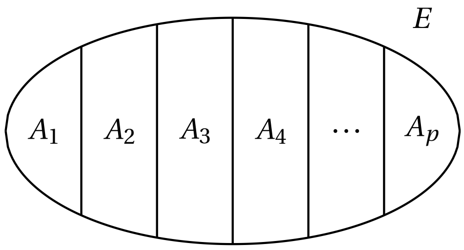
Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.



Définition 8.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.

Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.



Définition 8.5. Des parties A_1, A_2, ..., A_p d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.
Ainsi :

- Pour tous i et j de $\{1;\dots;p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\coprod_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E$.

Propriété 8.1. *Soit A une partie d'un ensemble E et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors A et $\overline{A}$ constituent une partition de E.*

Définition 8.6 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de E*. Ce nombre est noté Card(E). On convient que Card$(\varnothing)= 0$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

8.2.2 Expériences aléatoires

Issues, univers

Définition 8.7. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

Dans ce chapitre, Ω sera toujours un ensemble fini.

Évènements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2;3;\cdots;11;12\}$.
Le tableau 8.1 page suivante définit le vocabulaire relatif aux *évènements* (en probabilité).

TABLE 8.1: Vocabulaire relatif aux évènements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Évènement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2;4;6;8;10;12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3;6;9;12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10;11;12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2;3;4;5;6\}$
Évènement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Évènement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un évènement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un évènement impossible.
Évènement certain (noté Ω)	C'est un évènement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un évènement certain.
Évènement « A et B » (noté $A \cap B$)	Évènement constitué des issues communes aux 2 évènements	$A \cap B = \{6;12\}$
Évènement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Évènement constitué de toutes les issues des deux évènements	$A \cup B = \{2;3;4;6;8;9;10;12\}$
Évènements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des évènements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Évènements contraires (l'évènement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux évènements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'évènement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

8.2.3 Probabilités

Loi de probabilité sur un univers Ω

Définition 8.8. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0;1]$, appelés *probabilités*, tels que :

- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des évènements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Propriété 8.2. *Soit A et B deux évènements de Ω, alors :*

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Remarque. Comme, par définition, la probabilité de l'évènement certain est 1 alors la probabilité de l'évènement impossible, qui est son contraire, est 0.

Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

Définition 8.9. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un évènement A est la suivante :

Propriété 8.3. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout évènement élémentaire ω et tout évènement A on a :*

$$p(\omega) = \frac{1}{Card(\Omega)} \qquad p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même, comme par exemple dans l'activité 8.2.

8.3 Loi des grands nombres

Définition 8.10. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité ω_i donnée le nombre : $f_i = \frac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega_i \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres*; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

Théorème 8.4 (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.*

Remarques.

- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

8.4 Variables aléatoires

8.4.1 La situation

On illustrera toute cette section par la situation suivante : « On tourne une roue dans une fête foraine qui est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge, 3 de couleur verte et 4 de couleur bleue. »

8.4.2 Définition

Définition 8.11. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel k.
- L'évènement noté $\{X = k\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image k par X.
- L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X. Cet ensemble est noté Ω'.

Avec notre situation de départ on peut imaginer la variable aléatoire suivante : « La partie de roue à la fête foraine coûte 1 € et l'on gagne :

- 0 € si le bleu sort ;
- 2 € si le vert sort ;
- 5 € si le rouge sort. »

Lorsqu'on lance la roue, l'univers est donc $\Omega = \{\text{bleu}; \text{vert}; \text{rouge}\}$ et l'on peut définir la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain engendré.
Ainsi, en enlevant la mise (1 € pour pouvoir jouer), on a :

- X : bleu $\mapsto -1$
- X : vert $\mapsto 1$
- X : rouge $\mapsto 4$

Remarques.

- Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
- Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.
- En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z.

8.4.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 8.12. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité et $\Omega' = \{x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p'_i = p(X = x_i)$.

On démontre facilement que $\sum_i p'_i = 1$.

En reprenant la situation de départ, on a :

$k = \omega_i$	-1	1	4
$p(X = k) = p_i$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

8.4.4 Espérance, variance, écart type

Définition 8.13. L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X, dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont respectivement les nombres :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i w_i \qquad V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\omega_i - E(X)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \omega_i^2\right) - (E(X))^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{V}$$

Toujours avec l'exemple de la situation de départ : (X est le gain à la roue de la fête foraine)

- $E(X) = \frac{4}{8} \times (-1) + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 4 = \frac{3}{8}$
  (le gain qu'on peut espérer à chaque partie est en moyenne de 0,375 €)
- $V(X) = \frac{4}{8} \times (-1)^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{175}{64}$
- $\sigma(X) = \sqrt{\frac{175}{64}} \approx 1,654$

8.5 Exercices

EXERCICE 8.1.
On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on appelle « tirage »le résultat obtenu. Ainsi (Face ; Face ; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de « Pile »obtenues.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de X.

EXERCICE 8.2.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste passe si le feu est vert, sinon il s'arrête. On suppose de plus que chaque feu est vert durant les deux tiers du temps. On dit que l'automobiliste a obtenu le feu au vert quand il est passé sans s'arrêter.

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait les trois feux verts ? deux des trois feux verts ?
3. Combien de feux au vert l'automobiliste peut-il espérer ?

EXERCICE 8.3.
On reprend la roue de la situation de départ (paragraphe 8.4.1). L'organisateur du jeu se trouve vite sans le sou et décide de passer la partie à 2 euros au lieu d'un. Gagnera-t-il de l'argent sur le long terme ?

EXERCICE 8.4.
On considère une roue partagée en 15 secteurs égaux tels que :
- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a cinq secteurs de couleur bleue (B)
- il y a neuf secteurs de couleur verte (V)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.
Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :
- 0 € si le vert sort ;
- 1 € si le bleu sort ;
- x € si le rouge sort ;

On appelle X la variable aléatoire associée au gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers $X(\Omega)$ associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. Exprimer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.
4. On suppose que $x = 2$ € .

(a) Quelle est l'espérance de gain du joueur ?

(b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur du jeu ou le joueur ?

5. Mêmes questions pour $x = 15$ € .
6. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantagés. Combien doit valoir x pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 8.5.
On considère le jeu suivant : Le joueur lance deux dés à six faces ; s'il fait un double 6, il gagne un million d'euros, sinon il perd dix mille euros.
Faut-il lui conseiller le jeu ?

EXERCICE 8.6.
On dispose d'une roue qui comporte dix secteurs identiques, neuf verts et un rouge.
On propose les deux jeux suivants :

Jeu 1 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur gagne 2 000 euros, sinon il perd 8 000 euros.

Jeu 2 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur ne gagne ni ne perd rien, sinon, il gagne 10 000 euros.

1. Intuitivement, quel jeu semble le plus avantageux ?
2. Calculer, pour chaque jeu, l'espérance et la variance de gain du joueur. Que constate-t-on ?

EXERCICE 8.7.
Un sac contient quatre jetons rouges et trois jetons verts. On tire des jetons, avec remise après tirage, jusqu'à obtention d'un jeton de même couleur qu'un des jetons précédemment tirés. Calculer la probabilité que les deux jetons de même couleur soient bleus.

EXERCICE 8.8.
Deux roues de fête foraine sont disponibles, chacune comportant des secteurs identiques et équiprobables.

La roue A est conçue de la manière suivante :
- 1 secteur rapporte 6 € (mise comprise) ;
- 6 secteurs rapportent 0 € ;
- 1 secteur rapporte -6 €.

La roue B est conçue de la manière suivante :
- 1 secteur rapporte 4 € ;
- 1 secteur rapportent 0 € ;
- 4 secteurs rapportent -1 €.

1. Décrire les lois de probabilités pour chacune des roues.
2. Déterminer leurs espérances respectives et les comparer.
3. Déterminer leurs écarts-types respectifs et les comparer.
4. Résumer les différences entre ces deux roues.

EXERCICE 8.9.
On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note la différence (en valeur absolue) entre ces deux dés.

1. Définir la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type de cette expérience aléatoire.

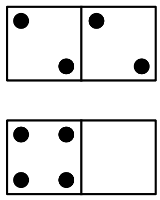
EXERCICE 8.10.
On jette trois fois de suite, de manière totalement indépendante une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et on appelle « tirage » le résultat obtenu. Ainsi (Face ; Face ; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X le nombre de « Pile »obtenues à chaque tirage.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer E et σ respectivement l'espérance et l'écart type de cette loi.

EXERCICE 8.11.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste passe quand le feu est vert et s'arrête sinon. On suppose de plus que chaque feu est vert les deux tiers du temps. Enfin on dit que l'automobiliste a eu le feu au vert quand il n'a pas eu à s'arrêter à ce feu.

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
   (a) les trois feux au vert ?
   (b) deux des trois feux au vert ?
   (c) au moins un des feux au vert ?
   (d) à s'arrêter au plus une fois ?
3. On note X le nombre de feux verts obtenus.
   (a) Décrire la loi de probabilité de X.
   (b) Déterminer l'espérance de cette loi.

EXERCICE 8.12 (La Réunion juin 2 007)**.**
Un domino est une petite plaque partagée en deux parties. Sur chacune des parties figure une série de points. Il peut y avoir de zéro à six points dans une série. Un jeu de dominos comporte 28 dominos, tous différents.



Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :

- le joueur tire au hasard un domino parmi les 28 dominos du jeu,
- il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.

On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés.

1. Établir la loi de probabilité des gains possibles.
2. Le joueur doit miser 7 € avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties ?

EXERCICE 8.13 (D'après Liban juin 2 007)**.**
Les places d'une salle de cinéma sont toutes occupées. Le film proposé est une rediffusion d'une comédie à grand succès. À la fin de la projection, on interroge au hasard une personne sortant de la salle.
On appelle V l'événement : « la personne interrogée avait déjà vu le film avant cette projection ».
On donne : la probabilité que l'événement V soit réalisé est égale à $0,345$.

1. On interroge au hasard et successivement quatre personnes sortant de la salle. On suppose que le nombre de spectateurs est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard d'un spectateur à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins une personne ait déjà vu le film avant cette projection ?
2. À la fin de l'année, une étude nationale a été réalisée sur le nombre de fois qu'un spectateur sortant de la salle est allé voir ce film. Le tableau ci-dessous, pour lequel il manque une valeur notée q représente la loi de probabilité du nombre de fois que le spectateur est allé voir ce film.

Nombre de fois	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,55	0,15	0,15	0,05	q	0,05

(a) Déterminer q.

(b) En déduire l'espérance mathématique, arrondie à l'unité de cette loi de probabilité et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 8.14 (Polynésie septembre 2 006)**.**
On suppose qu'un indice, calculé quotidiennement, n'évolue d'un jour à l'autre que de trois façons possibles soit il diminue de 10 %, soit il est stable, soit il augmente de 10 %. On note $i_0 = 100$ l'indice de départ et i_n l'indice au bout de n jours.

1. (a) Si pendant dix jours consécutifs il y avait trois jours de hausse, puis quatre jours de stabilité, puis trois jours de baisse, quel serait, arrondi au centième, l'indice final i_{10} ?
   Quelle serait l'évolution en pourcentage par rapport à i_0 ?

   (b) On suppose que l'indice augmente tous les jours. Montrer que la suite (i_n) des indices est une suite géométrique, dont on précisera le terme initial et la raison.
   Dans ce cas déterminer au bout de combien de jours cet indice dépassera la valeur 1 000.

2. Une étude a montré que, chaque jour, l'indice augmente de 10 % avec une probabilité égale à 0,3, diminue de 10 % avec une probabilité égale à 0,2 et reste stable avec une probabilité égale à 0,5.
   L'évolution d'un jour à l'autre est indépendante de l'évolution des jours précédents.
   On s'intéresse maintenant à l'évolution de cet indice sur deux jours. On note X la valeur de l'indice i_2 au bout de deux jours.

   (a) Construire un arbre de probabilités illustrant l'évolution de cet indice sur deux jours.

   (b) Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de X où les x_i sont les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X soit égale à x_i.

x_i	81	90		100	110	121
p_i		0,2	0,12	0,25		

   (c) Calculer l'espérance mathématique de X.

Devoir maison n°3

Variables aléatoires

À rendre pour le vendredi 20 mai.

Se fournir un ticket de la française des jeux sur lequel est indiqué le nombre de « lots gagnants ».
Calculer l'espérance de gain de ce jeu ainsi que son écart-type.

Chapitre 9

Loi binomiale

Sommaire

9.1 Activité

Partie A : Une expérience aléatoire élémentaire

On lance un dé équilibré. On gagne si on fait un 6. On note S, comme « succès », cette issue et E, comme « échec », l'autre issue.
Déterminer $p(S)$ et $p(E)$.

Partie B : Trois répétitions

On répète trois fois de suite et de façon indépendante l'expérience élémentaire de la partie A.

1. (a) Représenter cette nouvelle expérience par un arbre.
   (b) Quelles sont les probabilités des issues SES, ESS et SSE ?
   Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir deux succès » ?
   (c) Quelles sont les probabilités des issues EES, ESE et SEE ?
   Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir un succès » ?
2. (a) Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque issue, le nombre de succès obtenus lors des trois répétitions.
   Déterminer la loi de probabilité de X. *On présentera les résultats sous forme de tableau et on ne réduira pas les fractions.*
   (b) Déterminer l'espérance de X. Interpéter le résultat.

Partie C : Quatre répétitions

On répète quatre fois l'expérience élémentaire de la partie A de façon indépendante et on note Y la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès obtenus lors de ces quatre répétitions.
On décide de ne pas construire l'arbre.

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 4\}$.
2. Soit l'événement $\{Y = 2\}$.
   (a) Décrire une issue correspondant à cet événement et déterminer sa probabilité.
   (b) Décrire une issue distincte de la précédente correspondant à cet événement et déterminer sa probabilité.
   (c) Que constate-t-on ?
   (d) Que nous manque-t-il alors pour obtenir $p(Y = 2)$?
   (e) Quels sont les chemins de l'arbre de la partie B qui, après une quatrième répétition de l'expérience élémentaire, ne pourront pas mener à des issues correspondant à $\{Y = 2\}$?
   (f) À l'aide de l'arbre de la partie B, déterminer le nombre de chemins menant à des issues correspondant à $\{Y = 2\}$ lorsqu'on répète une quatrième fois l'expérience élémentaire.
   (g) En déduire $p(Y = 2)$.
3. Soit l'événement $\{Y = 1\}$.
   (a) Décrire une issue correspondant à cet événement et déterminer sa probabilité.
   (b) Décrire une issue distincte de la précédente correspondant à cet événement et déterminer sa probabilité.
   (c) Que constate-t-on ?
   (d) Que nous manque-t-il alors pour obtenir $p(Y = 1)$?
   (e) À l'aide de l'arbre de la partie B, déterminer le nombre de chemins menant à des issues correspondant à $\{Y = 1\}$ lorsqu'on répète une quatrième fois l'expérience élémentaire.
   (f) En déduire $p(Y = 1)$.
4. Soit l'événement $\{Y = 3\}$.
   (a) Décrire une issue correspondant à cet événement et déterminer sa probabilité.
   (b) Décrire une issue distincte de la précédente correspondant à cet événement et déterminer sa probabilité.
   (c) Que constate-t-on ?
   (d) Que nous manque-t-il alors pour obtenir $p(Y = 3)$?
   (e) À l'aide de l'arbre de la partie B, déterminer le nombre de chemins menant à des issues correspondant à $\{Y = 3\}$ lorsqu'on répète une quatrième fois l'expérience élémentaire.
   (f) En déduire $p(Y = 3)$.

Partie D : Sept répétitions

On répète sept fois l'expérience élémentaire de la partie A de façon indépendante et on note Z la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès obtenus au cours de ces sept répétitions.

1. Quelles valeurs peut prendre Z ?
2. Déterminer $p(Z=0)$ et $p(Z=7)$.
3. Soit l'événement $\{Z=4\}$.
   (a) Décrire une issue correspondant à cet événement et déterminer sa probabilité.
   (b) Décrire une issue distincte de la précédente correspondant à cet événement et déterminer sa probabilité.
   (c) Que constate-t-on ?
   (d) Que nous manque-t-il alors pour obtenir $p(Z=4)$?
   (e) On note $\binom{7}{4}$ le nombre de chemins menant à des issues telles que $Z=4$ après sept répétitions.
   Exprimer $p(Z=4)$ à l'aide de cette notation.
   (f) Décrire, à l'aide de cette notation, la loi de probabilité de Z.

Partie E : Cœfficients binomiaux

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins menant à des issues comportant k succès quand on répète n fois une expérience aléatoire élémentaire ne comportant que deux issues : un succès et un échec.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour k ?
2. À l'aide des activités précédentes, déterminer :
   (a) $\binom{1}{1}$ et $\binom{1}{0}$ (b) $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$ (c) $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ et $\binom{4}{4}$
3. (a) Exprimer, avec cette notation, la relation qui nous a permis d'obtenir $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$ et $\binom{4}{3}$.
   (b) En généralisant cette propriété, compléter le tableau 9.1, de la présente page, en indiquant dans chaque case les valeurs de $\binom{n}{k}$.

TABLE 9.1: Triangle de PASCAL

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

   (c) En déduire la loi de probabilité de Z de la partie D.

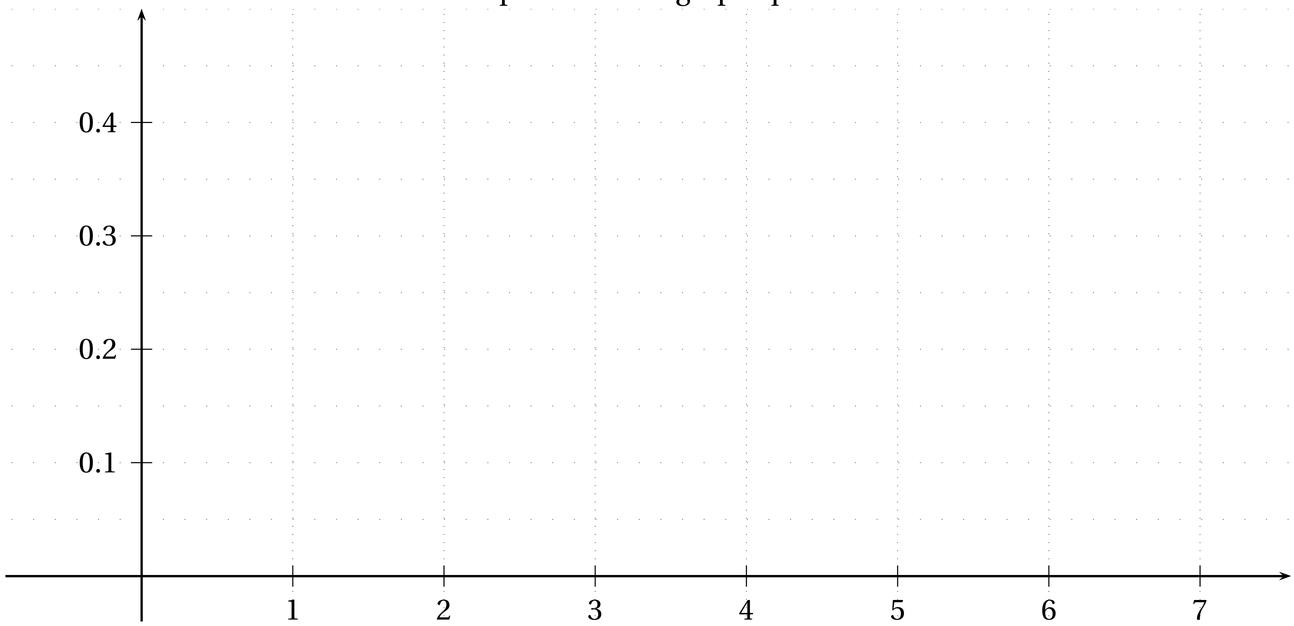
Partie F : Représentations graphiques

1. On a obtenu dans la partie précédente la loi suivante (les valeurs sont arrondies au millième) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(Z=k)$	0,279	0,391	0.234	0,078	0,016	0,002	0	0

La représenter dans le repère de la figure 9.1 de la présente page par un diagramme en bâtons tel que :
   - k sera en abscisse
   - la probabilité $p(X=k)$ sera la hauteur du bâton

FIGURE 9.1: Représentation graphique de la loi de Z



2. Rôle de n
On a représenté sur la figure 9.2 page ci-contre plusieurs lois de ce type, en faisant variant le nombre n de répétitions.
   (a) Qu'ont en commun ces représentations graphiques ?
   (b) Quel semble être le rôle de n sur ces lois de probabilité ?
3. Rôle de p
Dans notre expérience élémentaire, la probabilité d'obtenir un succès était $p=\frac{1}{6}$. On suppose pour la suite qu'on dispose de toutes sortes de dés truqués nous permettant d'obtenir la valeur que l'on souhaite pour p. On a répété l'expérience soixante fois ($n=60$) et on a représenté sur la figure 9.3 les différentes lois obtenues.
   (a) Qu'ont en commun ces représentations graphiques ?
   (b) Quel semble être le rôle de p sur ces lois de probabilité ?

FIGURE 9.2: Rôle de n

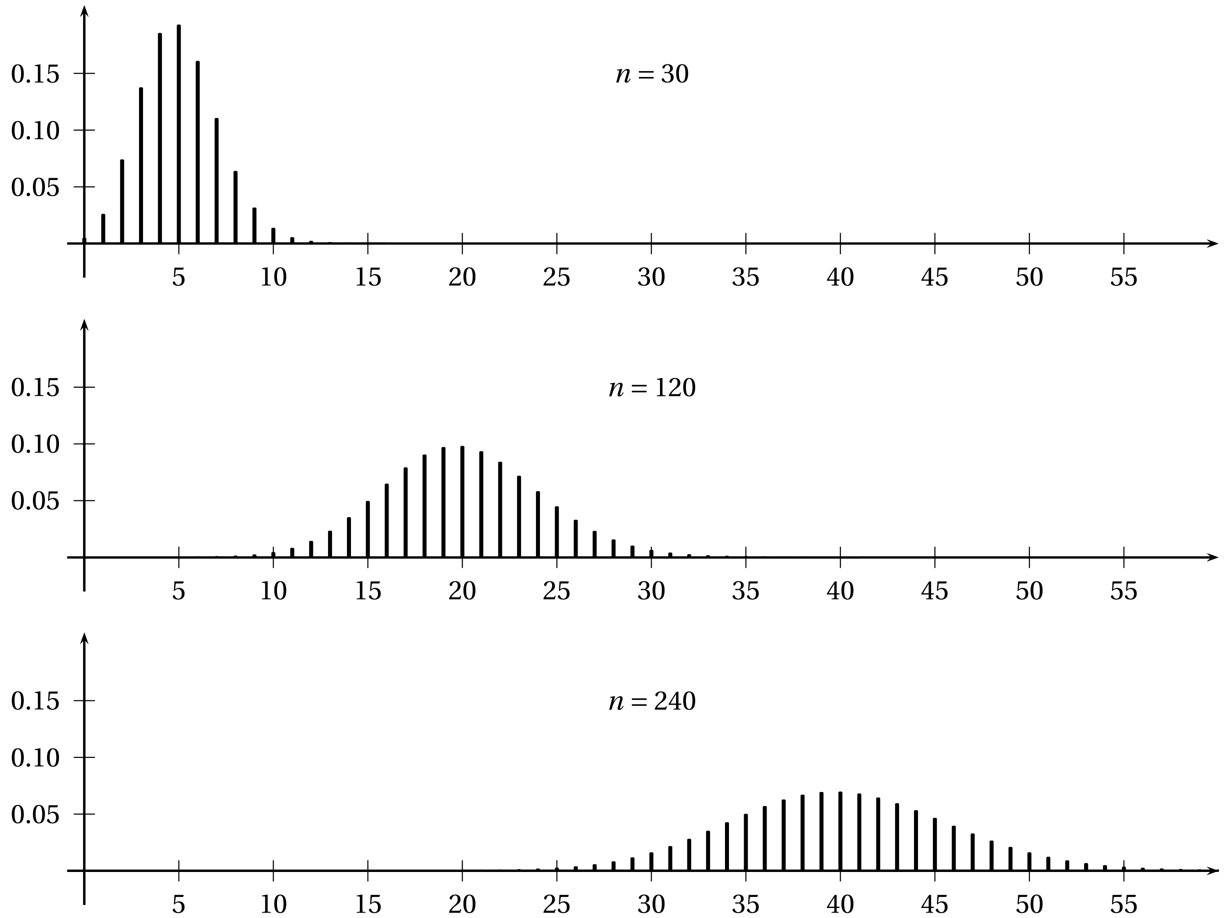
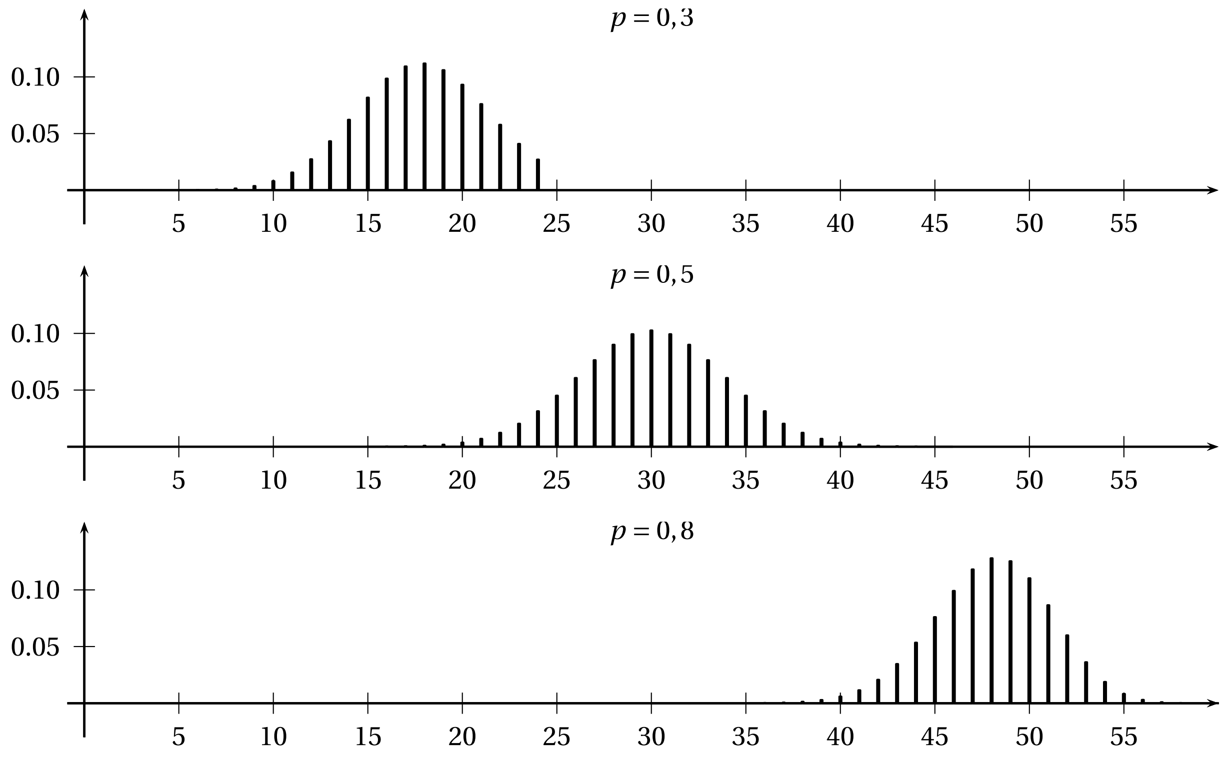


FIGURE 9.3: Rôle de p



Partie G : Intervalle de fluctuation et prise de décision

1. On a obtenu dans la partie précédente la loi suivante (les valeurs sont arrondies au millième). Compléter la dernière ligne.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(Z=k)$	0,279	0,391	0.234	0,078	0,016	0,002	0	0
$p(Z \leqslant k)$								

2. On cherche à partager l'intervalle $[0;7]$, où Z prend ses valeurs, en trois intervalles :
   - Un intervalle $[a; b]$ (où a et b sont des entiers) tel que $p(a \leqslant Z \leqslant b) \geqslant 0,95$;
   - Et pour qu'il soit centré au maximum, on s'impose que $p(Z < a) < 0,025$ et $p(Z > b) < 0,025$.

   Déterminer à l'aide du tableau précédant les valeurs de a et de b.
3. Sur un dé inconnu, pour tester l'hypothèse « le 6 a une probabilité de sortir égale à $\frac{1}{6}$ » au seuil de 95 %, connaissant l'intervalle $[a; b]$ correspondant à cette probabilité, on applique la règle suivante : on répète avec ce dé 7 fois l'expérience et on note la fréquence f d'apparition du 6. Si f n'est pas dans l'intervalle $\left[\frac{a}{7}; \frac{b}{7}\right]$, alors on rejette l'hypothèse.
   Dans quels cas rejettera-t-on alors cette hypothèse ?

9.2 Bilan et compléments

9.2.1 Premières définitions

Définition 9.1 (Épreuve de BERNOULLI)**.** On appelle *épreuve de* BERNOULLI de paramètre p toute expérience aléatoire ayant exactement deux issues possibles, qu'on appelle généralement, pour l'une, *succès*, notée S, et, pour l'autre, *échec*, notée $\overline{S}$, et telle que $p(S) = p$.

Définition 9.2 (Schéma de BERNOULLI)**.** On appelle *schéma de* BERNOULLI de paramètres n et p la répétition à n reprises, de façon indépendante, d'une même épreuve de BERNOULLI de paramètre p.

9.2.2 Cœfficients binomiaux

Définition 9.3 (Cœfficients binomiaux)**.** Soit un schéma de BERNOULLI de paramètres n et p.
Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle cœfficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins du schéma de Bernoulli menant à k succès.

Par convention $\binom{0}{0} = 1$ et on a les propriétés suivantes qui seront démontrées en classe :

Propriété 9.1. *Pour tout entier* $0 \leqslant k \leqslant n$ *:*
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

9.2.3 Loi binomiale

Définition 9.4 (Loi binomiale)**.** Soit un schéma de BERNOULLI de paramètres n et p.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès.
On dit que X suit une *loi binomiale de paramètres n et p*, généralement notée $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Propriété 9.2. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.*
Alors, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$:
- $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$;
- $p(X \leqslant k) = 1 - p(X > k)$;
- $p(X \geqslant k) = 1 - p(X < k)$.

Propriété 9.3. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$. Alors :*
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

On l'admettra.

9.2.4 Utilisation de la calculatrice

Les calculatrices permettent d'obtenir les valeurs exactes de $\binom{n}{k}$ et, dans le cas où la variable aléatoire suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, les valeurs approchées de $p(X = k)$ et de $p(X \leqslant k)$.

Pour l'exemple nous supposerons que la loi binomiale est de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}25$ et que $k = 2$.

	Casio anciens modèles	Casio modèles récents	TI
$\binom{10}{2}$	Menu RUN 10 OPTION PROB nCr 2	Menu RUN 10 OPTION PROB nCr 2	10 MATH PRB Combinaison (ou nCr) 2
$p(X = 2)$	Menu STAT DIST BINM Bpd Data : var x : 2 Numtrial : 10 p : 0,25 *Inutilisable dans les calculs (noter le résultat pour réutilisation)*	Menu RUN (OPTN STAT DIST BINM Bpd pour) BinomialPD(2, 10, 0.25)	DISTR binomFdp(10,0.25,2)
$p(X \leqslant 2)$	Menu STAT DIST BINM Bcd Data : var x : 2 Numtrial : 10 p : 0,25 *Inutilisable dans les calculs (noter le résultat pour réutilisation)*	Menu RUN (OPTN STAT DIST BINM Bcd pour) BinomialCD(2, 10, 0.25)	DISTR binomFRép(10,0.25,2)

9.2.5 Échantillonage et prise de décision

Intervalle de fluctuation avec la loi binomiale

L'intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95 % a été défini en Seconde de la façon suivante :

Définition. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p, proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille n.

Et la propriété suivante a alors été énoncée :

Propriété. *Dans le cas où $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, l'intervalle I suivant contient l'intervalle de fluctuation, c'est-à-dire que la probabilité qu'il contienne la fréquence observée est* au moins *égale à 95 % :*

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

La loi binomiale nous permet de calculer très exactement les probabilités des différentes fréquences observables dans un échantillon de taille n, à savoir les valeurs $\frac{k}{n}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$, même pour $n \leqslant 25$ et $p \notin]0,2\,;\,0,8[$. La règle est alors la suivante :

Propriété 9.4. *L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associé à une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}\,;\,\frac{b}{n}\right]$, où a et b sont les deux entiers naturels définis par :*

- *a est le plus petit des entiers k vérifiant $p(X \leqslant k) > 0,025$;*
- *b est le plus petit des entiers k vérifiant $p(X \leqslant k) \geqslant 0,975$.*

Remarques.

- Lorsque $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, il est proche de l'intervalle vu en Seconde.
- Lorsque n est assez grand, il est quasiment centré sur p.
- Cet intervalle s'obtient grâce aux possibilités des calculatrices (ou des logiciels) par la lecture des probabilités cumulées croissantes.

Prise de décision avec la loi binomiale

On considère une population dans laquelle *on suppose* que la proportion d'un certain caractère est p.
Pour juger de cette *hypothèse*, on y prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de taille n sur lequel on observe une fréquence f du caractère.
On rejette l'hypothèse selon laquelle le proportion dans la population est p lorsque la fréquence f observée est trop éloignée de p, dans un sens ou dans l'autre. On choisit de fixer le seuil à 95 % de sorte que la probabilité de rejeter l'hypothèse, alors qu'elle est vraie, soit inférieure à 5 %.
La règle de décision adoptée est alors la suivante :

Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % $\left[\frac{a}{n}\,;\,\frac{b}{n}\right]$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en question.
Sinon on rejette l'hypotèse selon laquelle cette proportion vaut p.

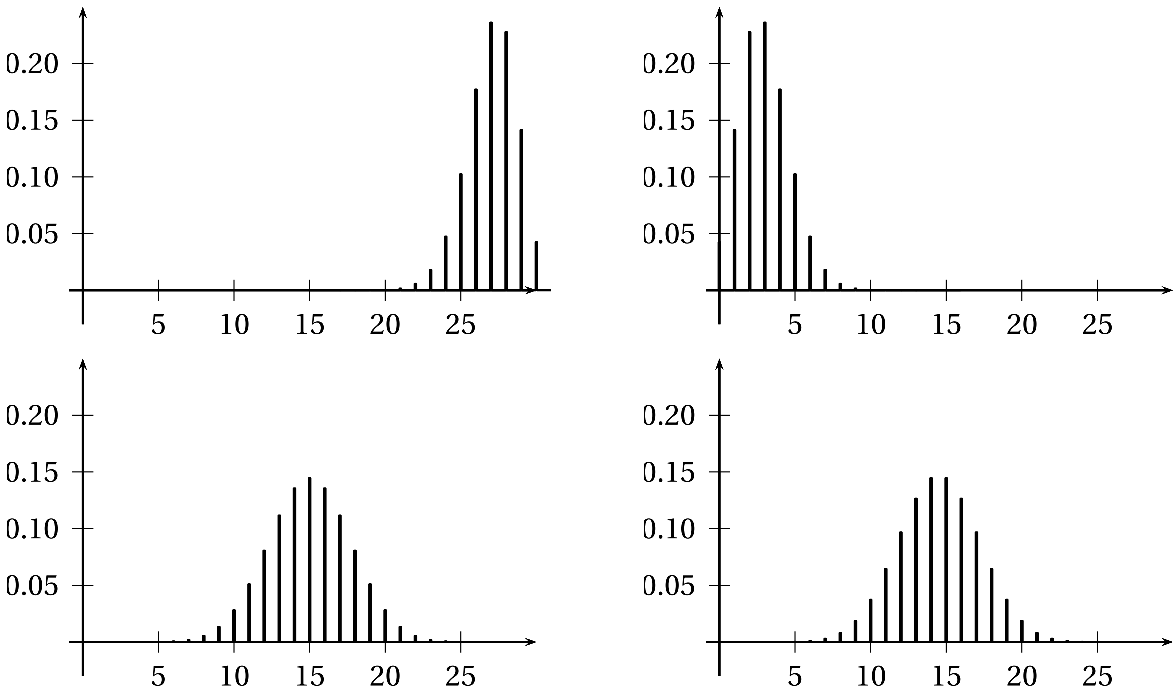
9.3 Exercices

EXERCICE 9.1.
Les expériences aléatoires suivantes sont-elles des épreuves de BERNOULLI ? Si oui préciser leur paramètre.

1. On lance un dé cubique équilibré et on gagne si on obtient 6.
2. On lance un dé tétraèdrique équilibré et on note le résultat obtenu.
3. Un automobiliste arrive à un feu et a une probabilité de 0,3 que le feu soit vert.
4. On tire une boule dans une urne contenant quatre boules rouges et six boules noires et on note la couleur de la boule obtenue.

EXERCICE 9.2.
On a représenté sur la figure 9.4 de la présente page la distribution de probabilité de quatre variables aléatoires suivant les lois binomiales $\mathscr{B}(30\,;0,1)$, $\mathscr{B}(30\,;0,5)$, $\mathscr{B}(30\,;0,9)$ et $\mathscr{B}(29\,;0,5)$.
Associer chaque loi à son graphique.

FIGURE 9.4: Figure de l'exercice 9.2



EXERCICE 9.3.
Une association comprenant 30 adhérents organise chaque année une assemblée générale. Les statistiques montrent que chaque adhérent assiste à l'assemblée avec la probabilité de 80 %. Les décisions prises par l'assemblée n'ont de valeur légale que lorsque plus de la moitié des adhérents assiste à l'assemblée.
Quelle est la probabilité que, lors de la prochaine assemblée, le quorum soit atteint ?

EXERCICE 9.4.
Paul affirme : « Avec un dé régulier, on a autant de chance d'obtenir au moins un six en 4 lancers que d'obtenir au moins deux six avec 8 lancers ».
Sara objecte : « Pas du tout. Dans le premier cas, la probabilité est supérieure à 0,5, dans le deuxième cas, elle est inférieure à 0,5 ».
Qui a raison ?

Exercice 9.5.
À chaque tir, un archer atteint sa cible avec une probabilité égale à 0,7.
Combien de tirs doit-il effectuer pour que, avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99, il atteigne la cible au moins deux fois ? Au moins trois fois ?

Exercice 9.6.
On lance une pièce équilibrée n fois. On s'intéresse à la probabilité d'obtenir « face » dans 60 % des cas ou plus.
Envisager les cas $n = 10$, puis $n = 100$, puis $n = 1000$.
Donner d'abord, sans calcul, une estimation spontanée du résultat, puis solliciter la calculatrice ($n = 10$) ou un algorithme de calcul $n = 100$ et $n = 1000$).

Exercice 9.7.
Une entreprise fabrique chaque jour 10 000 composants électroniques. Chaque composant présente un défaut avec la probabilité de 0,002. Si le composant est repéré comme étant défectueux, il est détruit par l'entreprise, et chaque composant détruit fait perdre 1 € à l'entreprise.

1. Les composants sont contrôlés un à un, et chaque contrôle coûte 0,1 €. Quel est le coût moyen journalier pour l'entreprise (contrôles et destruction des composants défectueux) ?
2. Les composants sont regroupés par lots de 10, et on effecture un unique contrôle automatique de chaque lot, qui coûte aussi 0,1 €. À l'issue de ce contrôle, le lot est accepté si tous les composants sont sains, et globalement détruit si l'un au moins des 10 composants présente un défaut. Quel est le coût moyen journalier pour l'entreprise de ce nouveau dispositif (contrôles et destruction des composants défectueux) ?

Exercice 9.8.
Un QCM comporte 20 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste. Chaque réponse rapporte un point et il n'y a pas de pénalité pour une réponse fausse.
Un candidat répond au hasard à chaque question.
Quel nombre total de points peut-il espérer ?
Quelle pénalité doit-on attribuer à une réponse fausse pour que le total espéré, en répondant entièrement au hasard, soit égal à 2 sur 20 ?

Exercice 9.9.
Un texte contient n erreurs. Lors d'une relecture, on considère que chaque erreur a 80 % de chances d'être corrigée.
Peut-on prévoir, en moyenne, le nombre d'erreurs restantes après une relecture, ..., après k relectures, k étant un entier supérieur à 1 ?

Exercice 9.10.
Cet exercice nécessite de disposer d'une calculatrice TI ou d'une calculatrice CASIO récente.
On dispose d'une partie de programme :

TI	Casio
: PROMPT N	"N" ? → N ↩
: PROMPT P	"P" ? → N ↩
: 0 → I	0 → I ↩
: While binomFRép(N,P,I) ⩽ 0,025	While BinomCD(I,N,P) ⩽ 0,025 ↩
: I+1 → I	I+1 → I ↩
: End	WhileEnd ↩
: I → A	I → A ↩

Remarque. binomFRép(n,p,k) ou BinomCD(I,N,P) calculent $p(X \leqslant k)$, où X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

1. (a) À quoi correspondent N et P demandés en début de programme ?

(b) À quoi correspond A à la fin du programme ?

2. Comment modifier ce programme pour qu'il obtienne A **et** B à la fin du programme ?
3. Comment modifier ce programme pour qu'il calcule les deux bornes de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale de paramètres n et p ?
4. On a exécuté ce programme avec $p = 0,4$ et on a obtenu les résultats suivants pour la borne inférieure :

n	20	50	200	1 000	5 000
Borne	0,2	0,26	0,335	0,37	0,3864

Comparer ce résultat avec la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation introduit en Seconde. Qu'observe-t-on ?

EXERCICE 9.11.

Monsieur Z, chef du gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52 % des électeurs lui font confiance. On interroge 100 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise) et on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, au seuil de 95 %, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur Z, dans un sens, ou dans l'autre.

1. On fait l'hypothèse que Monsieur Z dit vrai et que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est 0,52. Montrer que la variable aléatoire X, correspondant au nombre d'électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 100 électeurs, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.
2. On donne ci-dessous un extrait de la table des probabilités cumulées $p(X \leqslant k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,52$.

k	40	41	42	43	...	60	61	...
$p(X \leqslant k)$	0,0106	0,0177	0,0286	0,0444	...	0,9561	0,9719	...

(a) Déterminer a et b tels que :
- a est le plus petit entier tel que $p(X \leqslant a) > 0,025$;
- b est le plus petit entier tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

(b) Comparer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$, ainsi obtenu grâce à la loi binomiale, avec l'intervalle de Seconde.

3. Énoncer la règle de décision permettant de rejetter ou non l'hypothèse que la proportion des électeurs qui font confiance à Monsieur Z dans la population est 0,52, selon la valeur de la fréquence f des électeurs favorables à Monsieur Z obtenue sur l'échantillon.
4. Sur les 100 électeurs interrogés au hasard, 43 déclarent avoir confiance en Monsieur Z. Peut-on considérer, au seuil de 95 %, l'affirmation de Monsieur Z comme exacte ?

EXERCICE 9.12.

Un médecin de santé publique veut savoir si, dans sa région, le pourcentage d'habitants atteints d'hypertension artérielle est égal à la valeur de 16 % récemment publiée pour des populations semblables. En notant p la proportion d'hypertendus dans la population de sa région, le médecin formule l'hypothèse $p = 0,16$. Pour vérifier cette hypothèse, le médecin constitue un échantillon de $n = 100$ habitants de la région ; il détermine la fréquence f d'hypertendus (l'échantillon est prélevé au hasard et la population est suffisamment importante pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise).

Pour quelles valeurs de f, la médecin rejettera-t-il cette hypothèse ?

EXERCICE 9.13.
En novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida est condamné à huit ans de prison. Il attaque ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté est, selon lui, discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 80 % de la population du comté est d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors des années précédentes, il n'y a eu que 339 personnes d'origine mexicaine.
Devant la Cour Suprême, un expert statisticien produit des arguments pour convaincre du bien fondé de le requête de l'accusé. En vous situant dans le rôle de cet expert, pouvez-vous décider si les Américains d'origine mexicaine sont sous-représentés dans les jurys de ce comté ?

EXERCICE 9.14.
Un groupe de citoyens demande à la municipalité d'une ville la modification d'un carrefour en affirmant que 40 % des automobilistes tournent un utilisant une mauvaise file.
Un officier de police constate que sur 500 voitures prises au hasard, 190 prennent une mauvaise file.

1. Déterminer, en utilisant la loi binomiale sous l'hypothèse $p = 0,4$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
2. D'après l'échantillon, peut-on considérer, au seuil de 95 %, comme exacte l'affirmation du groupe de citoyens ?

EXERCICE 9.15.
Dans le monde, la proportion de gauchers est 12 %. Soit n le nombre d'élèves dans votre classe.

1. Déterminer, à l'aide de la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence des gauchers sur un échantillon aléatoire de taille n.
2. Votre classe est-elle « représentative » de la proportion de gauchers dans le monde ?

EXERCICE 9.16.
Deux entreprises recrutent leur personnel dans un vivier comportant autant d'hommes que de femmes. Voici la répartition entre hommes et femmes dans ces deux entreprises :

	Hommes	Femmes	Total
Entreprise A	57	43	100
Entreprise B	1350	1150	2500

Peut-on suspecter l'une des deux de ne pas respecter la parité hommes-femmes à l'embauche ?