Chapitre 1

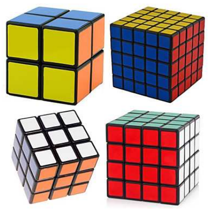
Divisibilité – Division euclidienne

Sommaire

1.1 Activités

ACTIVITÉ 1.1 (Cubes)**.**

Un cube est constitué de n^3 petits cubes identiques, où n est un entier supérieur ou égal à 2.
On lui enlève un petit cube et on souhaite regrouper les petits cubes restants en plusieurs paquets identiques.



1. Vérifier qu'un tel regroupement n'est pas possible pour $n = 2$.
2. On suppose que $n > 2$.
   (a) Vérifier que $8^3 - 1$ est divisible par 7.
   (b) Vérifier que $23^3 - 1$ est divisible par 22.
3. (a) Conjecturer un diviseur de $n^3 - 1$ pour un entier n quelconque.
   (b) Démontrer cette conjecture.
   Indication : Pour montrer que a divise b, il suffit de trouver une écriture de la forme $b = ka$ avec k entier.
   (c) En déduire en fonction de n deux nombres de paquets de petits cubes possibles.

Activité 1.2 (Code-barres)**.**

Le code-barres de nombreux produits est constitué de 13 chiffres. Les douze premiers chiffres permettent d'identifier le produit et le treizième est une clé de contrôle qui permet de détecter une éventuelle erreur dans les 12 chiffres d'identification.

1 234567 890128

Si l'on note a_1, a_2, … a_{12} et a_{13} les 13 chiffres d'un code-barres, et $S = 3 \times (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$ alors le chiffre a_{13} est un chiffre tel que le nombre $S + a_{13}$ est un multiple de 10.

1. Vérifier que le code $C = 9\,782701\,158334$ satisfait la contrainte définissant un code-barres valide.
2. Déterminer la clé de contrôle du code d'identification 9 782047 32850
3. Dans les deux cas précédents, calculer S puis calculer le reste r dans la division euclidienne de S par 10. Vérifier que la clé est égale à $10 - r$ dans ces deux cas.
4. (a) Quelles sont les valeurs possibles d'un reste dans une division euclidienne par 10 ?
   (b) Pour l'une de ces valeurs, la clé ne peut pas être égale à $10 - r$. Laquelle ? Quelle est la clé dans ce cas ?
   (c) Démontrer que lorsque le reste r est non nul, l'entier $10 - r$ est une clé qui convient.
5. Démontrer que la clé correspondant à une séquence d'identification $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ est unique, c'est-à-dire que « Si c et c' sont deux entiers satisfaisant la définition de la clé pour la séquence d'identification $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ alors $c = c'$ ».
6. Peut-il correspondre plusieurs séquences $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ d'identification à une clé c donnée ?
7. On suppose qu'on a fait une erreur sur le chiffre a_2 en entrant un code-barres dans une base de données (et aucune autre erreur). Notons b_2 le chiffre qui s'est substitué à a_2 et $S' = 3 \times (b_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}) + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$.
   (a) Donner un encadrement de la différence $a_2 - b_2$.
   (b) Calculer et encadrer la différence $S - S'$ et montrer que cette différence ne peut pas être un multiple de 10.
   (c) En déduire que la clé associée à S n'est pas la même que celle associée à S'.
8. Le raisonnement précédent montre que la présence d'une erreur unique, sur un chiffre de rang pair, peut être détectée. Montrer de même que la présence d'une erreur unique, faite sur un chiffre de rang impair, peut être détectée.
9. Donner un exemple montrant que lorsque deux erreurs sont commises, elles ne seront pas nécessairement détectées.

Activité 1.3 (Calendrier)**.**

On sait que le 1er septembre 2016 est un jeudi. À partir de ce renseignement, on aimerait pouvoir déterminer le jour de la semaine de n'importe quelle date à venir de l'année 2016 ou des années suivantes.

1. On se propose de chercher quel jour de la semaine tombe le 31 décembre 2016.
   (a) Combien de jours n s'écoulent entre ces deux dates ?
   (b) En divisant ce nombre par 7, en déduire le nombre q de semaines complètes qui se sont écoulées entre ces deux dates.
   (c) Calculer alors le nombre de jours r restant après ces q semaines pour atteindre la date du 31 décembre 2016. Écrire n en fonction de 7, q et r.
   (d) En déduire quel jour de la semaine est le 31 décembre 2016.
2. Déterminer de la même façon quel est le jour de la semaine du 1er mai 2017.
3. Déterminer de la même façon quel est le jour de la semaine du 1er mai 2018.

1.2 Bilan et compléments

Toutes les preuves seront faites en classe.

1.2.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition 1.1. Soient a et b deux entiers.
Dire que a *divise* b signifie qu'il existe un entier k tel que $b = ak$.

$$a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, b = ka$$

On dit aussi que a est un diviseur de b ou que b est un multiple de a.

EXERCICE 1.1.
Montrer que $n-1$ divise n^2-1.

On a les conséquences suivantes :
- Tout nombre entier relatif a divise 0
- L'ensemble des diviseurs de 0 dans $\mathbb{N}$ est $\mathbb{N}$
- Tout nombre entier naturel distinct de 1 admet au moins 2 diviseurs dans $\mathbb{N}$
- Tout entier relatif distinct de 0, 1 ou -1 admet au moins ...... diviseurs dans $\mathbb{Z}$

Propriété 1.1. *Soit a et b deux entiers.*
$a|b \Leftrightarrow -a|b \Leftrightarrow a|-b \Leftrightarrow -a|-b$.

Propriété 1.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
Tout entier naturel diviseur de n est compris entre 1 et n.
Tout entier naturel non nul a donc au plus n diviseurs dans $\mathbb{N}$ et $2n$ diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

Propriété 1.3. *Soient a, b et c des entiers.*
Si $a|b$ et $a|c$ alors a divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de b et c.

$$a|b \text{ et } a|c \Rightarrow \forall u, v \in \mathbb{Z}, a|bu + cv$$

En particulier $a|b+c$ et $a|b-c$.

EXERCICE 1.2.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a|n+4$ et $a|2n-3$.
Montrer que $a|11$.

Propriété 1.4. *Soient a, b et c des entiers.*
Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$.

Propriété 1.5. *Soient a et b deux entiers non nuls.*
Si $a|b$ et $b|a$ alors $a = b$ ou $a = -b$.

1.2.2 Division euclidienne

Dans $\mathbb{N}$

Théorème 1.6. *Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.*
Il existe un unique couple d'entiers naturels $(q\,;\,r)$ avec $0 \leqslant r < b$ tel que $a = bq + r$.

$$\exists!(q\,;\,r) \in \mathbb{N}^2 / a = bq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < b$$

En conséquence, dire que $a|b$ équivaut à dire que le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Définition 1.2. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
Effectuer la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ de a par b, c'est déterminer le couple $(q\,;\,r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

Dans $\mathbb{Z}$

La division euclidienne se généralise à des entiers relatifs.

Définition 1.3. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
Alors il existe un unique entier q et un unique entier naturel r tel que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < |b|$

1.3 Exercices

1.3.1 Applications directes du cours

Divisibilité

Exercice 1.3.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer l'ensemble des n tels que $n - 4|3n + 24$

Exercice 1.4.
Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ tels que $x^2 - y^2 = 5$.

Division euclidienne

Exercice 1.5.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que n s'écrit soit $2p$, soit $2p + 1$.
2. Montrer que n s'écrit soit $5p$, soit $5p + 1$, soit $5p + 2$, soit $5p + 3$, soit $5p + 4$.

Exercice 1.6.
Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $a = n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 3.

Exercice 1.7.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(n + 2)^2$ par $n + 4$.

1.3.2 Autres exercices

EXERCICE 1.8.
Déterminer l'ensemble des nombres entiers naturels n pour lesquels $5n+7$ est un diviseur de $2n+16$.

EXERCICE 1.9.
Déterminer l'ensemble des couples de nombres entiers $(x\,;\,y)$ tels que $(x-1)^2 \times y = 18$.

EXERCICE 1.10.
n et m sont des entiers naturels.

1. Déterminer les couples $(n\,;\,m)$ tels que $(2n-3)(4n-13)m = 15$.
2. En déduire sans calcul supplémentaire un couple $(n\,;\,m)$ tel que $(2n-3)(4n-13)m = 45$.

EXERCICE 1.11.
a et b désignent deux nombres entiers relatifs non nuls.

1. Développer $(a+b)^3$.
2. Démontrer que 3 divise a^3+b^3 si et seulement si 3 divise $(a+b)^3$.

EXERCICE 1.12.
n désigne un entier. Démontrer que si un nombre entier a divise $n-3$ et $2n-1$ alors a divise 5.

EXERCICE 1.13.
On souhaite déterminer les nombres entiers naturels x et y tels que $(2x+y)(3x-y) = 4$.

1. Montrer que si $(2x+y)(3x-y) = 4$ alors $2x+y$ et $3x-y$ sont des diviseurs de 4.
2. Conclure.

EXERCICE 1.14.
Démontrer que : « Pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $22^n + 6n - 1$ est divisible par 9 ».