

Devoir surveillé n°8

Variables aléatoires

L'énoncé est à rendre avec sa copie. Penser à écrire son nom en entête.
Le barème n'est qu'indicatif (le devoir est noté sur 20 points).

EXERCICE 8.1 (8 points).

On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le couple $(x; y)$ de nombres de 1 à 6 ainsi obtenus, les 36 couples étant alors équiprobables.

À partir de ce lancer de base on organise deux jeux :

Jeu 1 : La partie coûte 5 € ; des deux dés on note le plus grand ; si c'est un 6, on gagne 10 € sinon on ne gagne rien ;

Jeu 2 : La partie coûte 6 € ; on fait la somme des deux dés ; si cette somme vaut 7 on gagne 20 € sinon on ne gagne rien.

On appelle :

X : la variable aléatoire donnant le gain final (gain – coût de la partie) obtenu au jeu 1 ;

Y : celle donnant le gain final obtenu au jeu 2.

1. Définir les lois de probabilité de X et de Y .
On pourra les présenter chacune sous la forme d'un tableau.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$ ainsi que $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$, les espérances et écarts-types de X et de Y , arrondis au centième.
3. Sur la base des résultats obtenus à la question précédente, comparer les deux jeux.

EXERCICE 8.2 (5 points).

Une roue de fête foraine est partagée en 16 secteurs identiques : 2 de couleur rouge, 5 de couleur verte et 9 de couleur bleue.

Pour jouer on doit payer 3 € et on tourne alors la roue qui peut s'arrêter de manière équiprobable sur n'importe lequel des secteurs.

On gagne alors :

- x € si la roue s'arrête sur un secteur rouge ;
- 4 € si elle s'arrête sur un secteur vert ;
- 0 € si elle s'arrête sur un secteur bleu.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain final (gain – coût de la partie).

1. Dans le cas où $x = 10$.
 - (a) Décrire la loi de probabilité de X .
 - (b) Déterminer $E(X)$, son espérance.
 - (c) Qui est le plus avantageux entre l'organisateur du jeu ou le joueur ? *Justifier.*
 2. On dit que le jeu est équitable quand ni l'organisateur ni le joueur ne sont avantageés. Déterminer x pour que le jeu soit équitable.
-

EXERCICE 8.3 (7 points).

On dispose d'un dé à 6 faces parfaitement équilibré.

n , où n est un entier entre 0 et 6, des faces du dé sont rouges et les autres sont vertes.

La partie coûte $2n$ €.

Une partie consiste à jeter deux fois le dé. Si on obtient deux couleurs identiques on gagne $3n$ €, sinon on ne gagne rien.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain final (gain – coût de la partie).

1. Dans le cas où $n = 3$.

(a) Décrire la loi de probabilité de X .

(b) Déterminer $E(X)$ son espérance.

(c) Qui est le plus avantageux entre l'organisateur du jeu ou le joueur ? *Justifier*.

2. Cas général.

(a) Montrer que $E(X) = \frac{n^3 - 6n^2 + 6n}{6}$.

(b) Déterminer pour quelles valeurs de n le jeu est avantageux pour le joueur et pour quelle(s) valeur(s) de n le jeu est le plus avantageux pour le joueur.
