Devoir surveillé nº 7

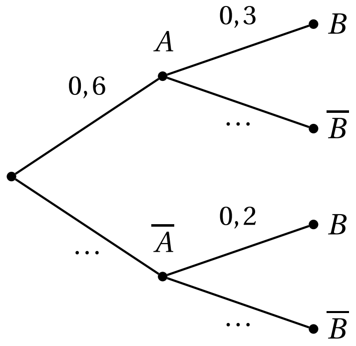
Logarithme népérien – Probabilités conditionelles – Calcul intégral

L'énoncé est à rendre avec sa copie. Penser à écrire son nom en entête.
Le barème est provisoire. Le devoir est noté sur 20.

EXERCICE 7.1 (6 points).

Les questions de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, des affirmations sont proposées : une seule est exacte.
Cocher l'affirmation exacte pour chaque question, sachant qu'une affirmation exacte rapporte 1 point, l'absence d'affirmation, les affirmations multiples ou une affirmation fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

1. L'arbre de probabilités ci-dessous représente une situation où A et B sont deux évènements, dont les évènements contraires sont notés respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$.



   (a) Alors
   ☐ $p_A(B) = 0,18$ ☐ $p(A \cap B) = 0,9$ ☐ $p_A(\overline{B}) = 0,7$ ☐ $p(B) = 0,5$

   (b) La probabilité de l'évènement B est égale à :
   ☐ $0,5$ ☐ $0,18$ ☐ $0,26$ ☐ $0,38$

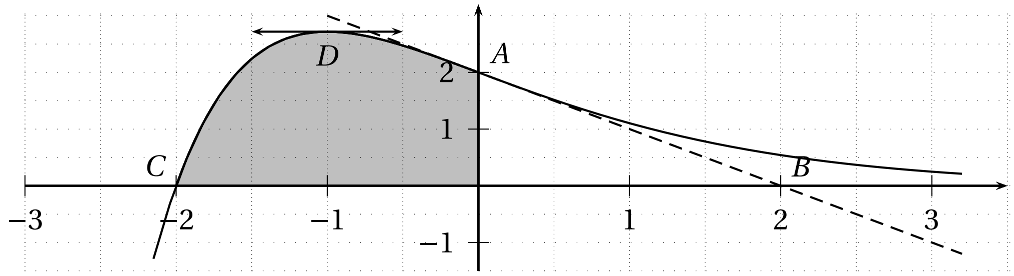
2. On désigne par n un nombre entier naturel. L'inégalité $0,7^n \leqslant 0,01$ est réalisée dès que :
   ☐ $n \geqslant 12$ ☐ $n \geqslant 13$ ☐ $n \leqslant 13$ ☐ $n \geqslant 70$

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2$ est convexe sur l'intervalle :
   ☐ $]-\infty\,;+\infty[$ ☐ $[-2\,;+\infty[$ ☐ $]-\infty\,;-2]$ ☐ $[-6\,;+\infty[$

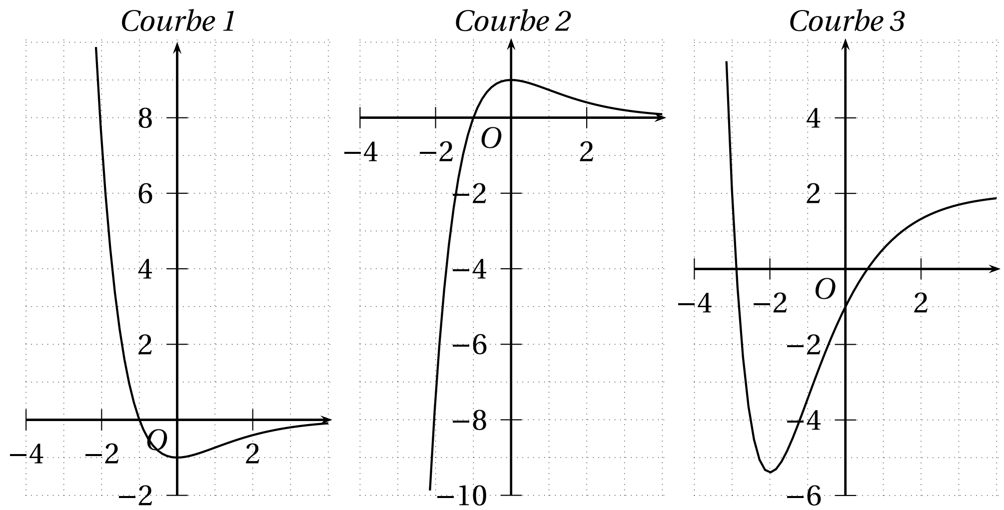
4. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$. L'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$:
   ☐ aucune solution ☐ une seule solution
   ☐ exactement deux solutions ☐ plus de deux solutions

5. La fonction h est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = (2x+4)\ln x$. On note h' la fonction dérivée de la fonction h. Pour tout nombre x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $h'(x)$ est égale à :
   ☐ $\frac{2}{x}$ ☐ $2\ln x + \frac{4}{x}$ ☐ $\frac{2x+4}{x}$ ☐ $2\ln x + \frac{2x+4}{x}$

EXERCICE 7.2 (5 points)**.**
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthogonal (1 unité = 2 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 0,75 cm sur l'axe des ordonnées), d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\ 2)$ et $C(-2;0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses. Le domaine grisé $\mathscr{D}$ est délimité par les axes de coordonnées et par la courbe Γ.



1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f. Déterminer laquelle en expliquant avec soin les raisons de votre choix.
3. (a) Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle en expliquant avec soin les raisons de votre choix.
   (b) Déterminer alors l'aire du domaine grisé $\mathscr{D}$ en cm^2.



EXERCICE 7.3 (9 points).
Les parties A et B ne sont pas indépendantes

Partie A
On considère la fonction f définie sur $[1\ ;11]$ par

$$f(x) = -0,5x^2 + 2x + 15\ln x$$

1. On appelle f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[1\ ;11]$. Montrer que

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 15}{x}$$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;11]$.
   On donnera les valeurs exactes des éléments du tableau.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\ ;11]$.
   (b) Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.
   (c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[1\ ;11]$.
4. (a) On considère la fonction F définie sur $[1\ ;11]$ par

$$F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x + 15x\ln x$$

   Montrer que F est une primitive de la fonction f
   (b) Calculer $\displaystyle\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On donnera le résultat exact puis sa valeur arrondie au centième.
   (c) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;11]$.
   On donnera la valeur arrondie au centième.
   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ est donnée par $m = \frac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B
Une société fabrique et vend des chaises de jardin. La capacité de production mensuelle est comprise entre 100 et 1 100 chaises.
Le bénéfice mensuel réalisé par la société est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre de centaines de chaises de jardin produites et vendues et $f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros.
On précise qu'un bénéfice peut être positif ou négatif, ce qui correspond, dans ce deuxième cas, à une perte.

1. Quelles quantités de chaises la société doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel positif ?
2. Déterminer le nombre de chaises que la société doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.