Un corrigé du devoir surveillé de rattrapage du n°7

QUESTION DE COURS (1,5 point)**.**
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^2$.
En utilisant le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée f' est $f' : x \longmapsto 2x$.

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$ avec $h \neq 0$.
Quand h tend vers 0, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a+h$ tend vers $2a$ donc f est dérivable $\forall x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

EXERCICE 7.1 (7,5 points)**.**
Au centre d'un hall d'exposition, on doit monter deux stands en toile réservés à l'accueil des visiteurs.
Le premier a la forme d'une pyramide régulière à base carrée et le second celle d'un cube ; ils sont accolés à la base par un côté et s'étalent sur une longueur totale de 10 m.

Pour des raisons esthétiques, le responsable de la décoration exige que la hauteur de la pyramide soit égale au côté de sa base et souhaite que l'aire totale occupée au sol par ces deux stands soit la plus petite possible.
Le responsable technique souhaite que le volume total de ces deux stands soit le plus petit possible pour permettre une économie d'énergie.
Ils s'adressent à l'ingénieur en chef (c'est vous) pour qu'il trouve la meilleure solution.
On note x la longueur, et donc la hauteur, en mètres de la pyramide, x étant compris entre 0 et 10. On note $\mathscr{A}$ la fonction qui à x associe l'aire totale occupée au sol par les deux stands et $\mathscr{V}$ la fonction qui à x associe leur volume total, ces deux fonctions étant définies sur $[0\,;10]$.

1. (a) Calculer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

   $\mathscr{A}(x) = x^2 + (10-x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100$.

   (b) Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$, dresser son tableau de variation et préciser son minimum sur $[0\,;10]$.

   $\mathscr{A}$ étant un polynôme, elle est dérivable sur son ensemble de définition et $\mathscr{A}'(x) = 4x-20$ qui est une expression affine négative sur $[0\,;5]$ et positive sur $[5\,;10]$.

   D'où :

x	0		5		10
Signe de $\mathscr{A}'$		−	0	+	
Variations de $\mathscr{A}$	100	↘	50	↗	100

   Le minimimum de $\mathscr{A}$ sur $[0\,;10]$ est donc $50\,\text{m}^2$, atteint pour $x = 5$ m.

2. (a) Montrer que $\mathscr{V}(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 30x^2 - 300x + 1\,000$.

   $\mathscr{V}(x) = \frac{1}{3}x^3 + (10-x)^3 = \frac{1}{3}x^3 + 1\,000 - 300x + 30x^2 - x^3 = -\frac{2}{3}x^3 + 30x^2 - 300x + 1\,000$

   (b) Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{V}$, dresser son tableau de variation et préciser son minimum sur $[0\,;10]$ arrondi à l'unité.

   $\mathscr{V}$ étant un polynôme, elle est dérivable sur son ensemble de définition et $\mathscr{V}'(x) = -2x^2 + 60x - 300$ qui est un trinôme négatif entre ses racines : $x_1 = 15 + 5\sqrt{3} \approx 23{,}6$ et $x_2 = 15 - 5\sqrt{3} \approx 6{,}3$.

D'où :

x	0		x_2		10
Signe de $\mathcal{V}'$		$-$	0	$+$	
Variations de $\mathcal{V}$	$1\,000$	$\searrow$	≈ 134	$\nearrow$	$\dfrac{1000}{3}$

Le minimimum de $\mathcal{V}$ sur $[0\,;\,10]$ est donc environ $134\,\text{m}^3$, atteint pour $x = 15 - 5\sqrt{3} \approx 6,3\,\text{m}$.

3. Vous êtes l'ingénieur : quelle valeur entière de x choisiriez-vous ? Expliquer votre choix.

Je choisirai soit 5 m soit 6 m mais plutôt 6 m qui ne donnerait raison ni à l'un ni à l'autre tout en étant situé entre les deux valeurs optimales.

EXERCICE 7.2 (4 points)**.**
Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \frac{x-2}{2x^2-5x+4}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}$, l'ensemble de définition de f.

$f(x)$ n'est pas défini quand $2x^2 - 5x + 4 = 0$. Or $\Delta = -7 < 0$ donc $2x^2 - 5x + 4 \neq 0$ donc $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation en y indiquant les valeurs extrêmes.

f est une fonction dite rationnelle donc est dérivable sur son ensemble de définition et $f'(x) = \frac{(1)(2x^2-5x+4)-(x-2)(4x-5)}{(2x^2-5x+4)^2} = \frac{-2x^2+8x-6}{(2x^2-5x+4)^2}$.
$(2x^2 - 5x + 4)^2 > 0$ donc $f'(x)$ sera du signe de $-2x^2 + 8x - 6$ qui est un trinôme négatif sauf entre ses racines $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$.

D'où :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{7}$	$\searrow$	

EXERCICE 7.3 (3,5 points)**.**
$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = a$, $BC = b$ et $AC = c$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{c^2-a^2-b^2}{2}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} &= \tfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(c^2 - a^2 - b^2\right)\\
&= \tfrac{c^2-a^2-b^2}{2}
\end{aligned}$$

2. En déduire la longueur BD en fonction de a, b et c.

$$\begin{aligned}
BD^2 &= \overrightarrow{BD}^2 = \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)^2\\
&= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2\\
&= BA^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + AD^2\\
&= a^2 - (c^2 - a^2 - b^2) + b^2\\
&= 2a^2 + 2b^2 - c^2
\end{aligned}$$

donc $BD = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

3. On donne $a = 6$ et $b = 3$. Combien doit valoir c pour que $BD = 4$?

$BD = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \Leftrightarrow BD^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \Leftrightarrow 16 = 72 + 18 - c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{74}$.

EXERCICE 7.4 (7,5 points).

$ABCD$ est un carré de côté a, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. H est le projeté orthogonal de D sur la droite (AJ) et K le point d'intersection des segments $[AJ]$ et $[CI]$.

1. (a) Déterminer $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD}$ en fonction de a.

   $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right).\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AD} = 0 + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AD} = BJ \times AD = \frac{1}{2}a^2$

   (b) Déterminer $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD}$ en fonction de AH et de a.

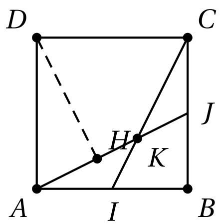
   $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AH}$ car $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AD}$ sur (AJ). Donc $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AH} = AJ \times AH = \sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2} \times AH = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} \times AH = \frac{a\sqrt{5}}{2}AH$

   (c) En déduire AH en fonction de a.

   $\frac{1}{2}a^2 = \frac{a\sqrt{5}}{2}AH \Leftrightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

2. En exprimant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{CI}$, déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{JKI}$ puis donner la valeur approchée à 0,1° près par défaut de la mesure de $\widehat{JKI}$.

   D'une part $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{CI} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right).\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{BI} = 0 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + 0 = -a^2$.
   D'autre part $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{CI} = AJ \times CI \times \cos\widehat{JKI} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \cos\widehat{JKI} = \frac{5}{4}a^2$.
   Donc $\cos\widehat{JKI} = -\frac{4}{5}$ et $\widehat{JKI} \approx 143,1°$.



EXERCICE 7.5 (13 points).

Le but de l'exercice est de vérifier, dans un cas particulier, la propriété suivante : « Dans un triangle, l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité sont alignés ».

La plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On donne les points $A(-1;-6)$, $B(11;6)$ et $C(17;-4)$. On appelle I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

1. Placer ces points dans le repère de la figure 7.1 page 156 et la compléter par la suite par tous les objets géométriques rencontrés dans l'exercice.

   Voir figure 7.1 page 156.

2. Cercle circonscrit

   (a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}$, la médiatrice du segment $[AC]$.

   $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}18\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{D}$ donc $\mathscr{D} : ax+by+c=0 \Leftrightarrow 18x+2y+c=0$.

   $K(8;-5)$ appartient à $\mathscr{D}$ donc $18x_K+2y_K+c=0 \Leftrightarrow 144-10+c=0 \Leftrightarrow c=-134$.

   $\mathscr{D} : 18x+2y-134=0 \Leftrightarrow 9x+y-67=0$.

   (b) On donne $\mathscr{D}' : x+y-5=0$. Montrer $\mathscr{D}'$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

   $\mathscr{D}' : x+y-5=0 \Leftrightarrow ax+by+c=0$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathscr{D}'$.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix} = 12\vec{n}$ donc $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur normal de $\mathscr{D}'$. Donc $\mathscr{D}' \perp (AB)$.

   $I(5;0)$ milieu de $[AB]$. $x_I+y_I-5=0$ donc $I \in \mathscr{D}'$.

   Donc $\mathscr{D}'$ est bien la médiatrice de $[AB]$.

   (c) Justifier que Ω, centre du cercle circonscrit au triangle ABC appartient à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$ puis déterminer les coordonnées de Ω.

$\Omega A = \Omega C \Leftrightarrow \Omega \in \mathscr{D}$. $\Omega A = \Omega B \Leftrightarrow \Omega \in \mathscr{D}'$.

$\Omega(x\,;\,y) \in \mathscr{D} \cap \mathscr{D}' \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + y - 67 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7,75 \\ y = -2,75 \end{cases}$

(d) Soit Γ, le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer une équation cartésienne de Γ.

$\Gamma : (x - 7,75)^2 + (y + 2,75)^2 = R^2$.
$A \in \Gamma \Leftrightarrow R^2 = (x_A - 7,75)^2 + (y_A + 2,75)^2 = 87,125$.
$\Gamma : (x - 7,75)^2 + (y + 2,75)^2 = 87,125$.

3. Soit $H\left(\frac{23}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}12,5\\7,5\end{pmatrix}.\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix} = 75 - 75 = 0$ donc H appartient à la hauteur issue de A.

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}0,5\\-4,5\end{pmatrix}.\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}18\\2\end{pmatrix} = 9 - 9 = 0$ donc H appartient à la hauteur issue de B.

Donc H est le point de concourt des hauteurs, donc l'orthocentre.

4. Centre de gravité.

(a) Soit G le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. Déterminer les coordonnées de G.

Soit $G(x\,;\,y)$.
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1-x\\-6-y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}11-x\\6-y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}17-x\\-4-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x = 9 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$

(b) Montrer que C, I et G sont alignés. En déduire que G appartient à la médiane du triangle ABC issue de C.

$\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}-12\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}-8\\\frac{8}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$.
$XY' - X'Y = -32 + 32 = 0$ donc $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CG}$ colinéaires, donc $G \in (IC)$ qui est la médiane issue de C.

(c) Montrer de la même manière que G appartient aussi à la médiane du triangle ABC issue de B.

$\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-3\\-11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-2\\-\frac{22}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$.
$XY' - X'Y = 22 - 22 = 0$ donc $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BG}$ colinéaires, donc $G \in (BK)$ qui est la médiane issue de B.

(d) En déduire la nature de G.

G est le point de concourt des médianes donc c'est le centre de gravité du triangle ABC.

5. Vérifier l'énoncé proposé.

$\Omega(7,75\,;\,-2,75)$, $H\left(\frac{23}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ et G, $\left(9\,;\,-\frac{4}{3}\right)$.
$\overrightarrow{\Omega H}\begin{pmatrix}\frac{15}{4}\\\frac{17}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega G}\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\\frac{17}{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$.
$XY' - X'Y = \frac{85}{16} - \frac{85}{16} = 0$.
Donc $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{\Omega G}$ sont colinéaires et les points Ω, H et G sont alignés.

FIGURE 7.1: Repère de l'exercice 7.5