Devoir surveillé n° 6

Probabilités conditionelles – Exponentielle – Logarithme népérien

L'énoncé est à rendre avec sa copie. Penser à écrire son nom en entête.
Le barème est provisoire. Le devoir est noté sur 24.

EXERCICE 6.1 (6 points - Sujet A)**.**

Les questions de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, des affirmations sont proposées : une seule est exacte.
Cocher l'affirmation exacte pour chaque question, sachant qu'une affirmation exacte rapporte 1 point, l'absence d'affirmation, les affirmations multiples ou une affirmation fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

1. La valeur exacte de $\ln\left(10\mathrm{e}^2\right)$ est
   ☐ $2\ln(10)+2$ ☐ $4{,}302\,585\,093$ ☐ $\ln(10)+2$ ☐ $2\ln(10\mathrm{e})$
2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=1+\ln(x)$. L'équation $f(x)=0$ a pour solution :
   ☐ e ☐ -1 ☐ $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ☐ 1
3. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'équation $\ln(x)+\ln(x+3)=3\ln(2)$ équivaut à :
   ☐ $2x+3=6$ ☐ $2x+3=8$ ☐ $x^2+3x=6$ ☐ $x^2+3x=8$
4. L'inéquation $\ln x < -\ln 3$ a pour ensemble de solution :
   ☐ $]0\,;+\infty[$ ☐ $]3\,;+\infty[$ ☐ $\left]0\,;\frac{1}{3}\right[$ ☐ $]0\,;3[$
5. Pour tous réels a et b strictement positifs, le réel $\mathrm{e}^{\ln a+\ln b}$ est égal à :
   ☐ ab ☐ $\frac{a}{b}$ ☐ $a+b$ ☐ $a-b$
6. Pour tout $a>0$, $\ln(3a)-\ln(a)$ est égal à :
   ☐ $\ln 3$ ☐ $\ln(2a)$ ☐ $2\ln a$ ☐ $\ln\left(3a^2\right)$

EXERCICE 6.2 (7,5 points)**.**

Un supermarché dispose d'un stock de pommes. On sait que 40 % des pommes proviennent d'un fournisseur A et le reste d'un fournisseur B.
Il a été constaté que 85 % des pommes provenant du fournisseur A sont commercialisables. La proportion de pommes commercialisables est de 95 % pour le fournisseur B.
Le responsable des achats prend au hasard une pomme dans le stock. On considère les évènements suivants :
A : « La pomme provient du fournisseur A ».
B : « La pomme provient du fournisseur B ».
C : « La pomme est commercialisable ».

PARTIE A

1. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.
2. Montrer que la probabilité que la pomme ne soit pas commercialisable est 0,09.
3. La pomme choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois plus de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

Pour les parties B et C, on admet que la proportion de pommes non commercialisables est 0,09 et, quand nécessaire, on arrondira les résultats au millième.

PARTIE B

On prend au hasard 15 pommes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

1. Quelle est la probabilité que les 15 pommes soient toutes commercialisables ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 14 pommes soient commercialisables ?

PARTIE C
Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 200 pommes. Il s'aperçoit que 22 pommes sont non commercialisables.
Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ?

EXERCICE 6.3 (10,5 points).
Partie A
Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,10]$ par $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}$.
Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x+1)$
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	$x \longmapsto x + \exp(-x+1)$
2	derive $(f(x))$
	$-\exp(-x+1)+1$
3	solve $(-\exp(-x+1)+1>0)$
	$[x>1]$
4	derive $(-\exp(-x+1)+1)$
	$\exp(-x+1)$

1. Étude des variations de la fonction f
   (a) En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.
   (b) En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.
2. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

Partie B
Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.
Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?
2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.
   (a) Justifier que le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets est $1{,}2x$ milliers d'euros.
   (b) Montrer que la marge brute pour x centaines d'objets, notée $g(x)$, en milliers d'euros, est donnée par : $g(x) = 0{,}2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.
   (c) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
3. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   (b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0{,}01$.
4. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.