Nom : *Jeudi 25 février 2016 – 2h00*

Devoir surveillé n°6 – Sujet B

Angles orientés – Trigonométrie – Dérivation

L'énoncé est à rendre avec sa copie. *Penser à écrire son nom en entête.*
Le barème n'est qu'indicatif (le devoir est noté sur 30 points).

QUESTION DE COURS (1 point)
Montrer que $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right) = -\left(\vec{v}\,;\,\vec{u}\right)$.

EXERCICE 6.1 (4 points).
Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$ cm.

1. Construire le point C tel que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ et $AB = AC$.
2. Soit D tel que ACD soit un triangle équilatéral et $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CD}\right) \equiv \frac{17\pi}{3} \pmod{2\pi}$.
   Déterminer la mesure principale de $\left(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CD}\right)$ et construire D.
3. Construire le point F tel que A, F et C sont alignés et $\left(\overrightarrow{BF}; \overrightarrow{CD}\right) \equiv \frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi}$.
4. Démontrer que les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires.

EXERCICE 6.2 (4 points).
Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions des équations suivantes :

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0; 4\pi]$.
2. $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0; 2\pi]$.

EXERCICE 6.3 (2 points).
Simplifier au maximum l'expression :

$$\mathscr{E} = \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x) + \cos(\pi + x)$$

EXERCICE 6.4 (6 points).
On a représenté sur la figure 6.1 page 127 la courbe Γ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0; -2)$ et $B(-2; 0)$. La droite (AC), où $C(-1; 1)$ est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point D d'abscisse -3 (et d'ordonnée environ $0{,}05$) est parallèle à l'axe des abscisses. La courbe est en-dessous de l'axe des abscisses après le point B. La fonction f est croissante jusqu'à -3.

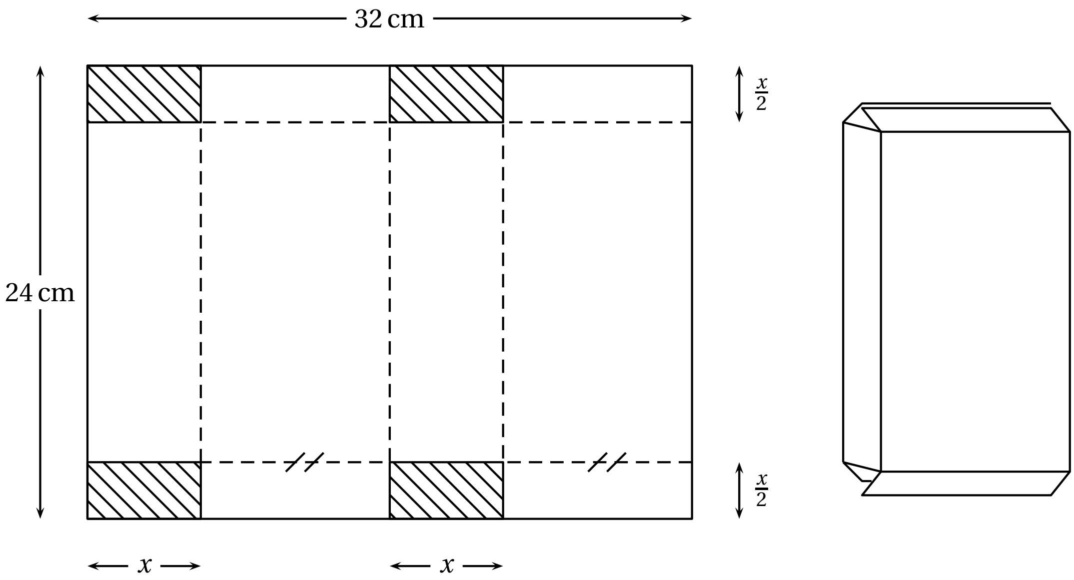
1. Donner sans justifier $f(0)$ et $f(-2)$.
2. Donner en justifiant $f'(0)$ et $f'(-3)$.
3. Une des représentations graphiques de la figure 6.2 page 127, représente la fonction dérivée f' de f.
   Déterminer laquelle en justifiant son choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.
4. Une des représentations graphiques de la figure 6.2 page 127, représente une fonction g telle que $g' = f$.
   Déterminer laquelle en justifiant son choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

EXERCICE 6.5 (8 points).
Soit f la fonction qui a x associe :

$$f(x) = \frac{1,5x^2 - 4x + 1}{2x+1}$$

1. Déterminer $\mathscr{D}$, l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de f avec les axes de coordonnées.
   Les valeurs exactes sont attendues.
3. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathscr{D}$.
   (a) Montrer que $f'(x) = \frac{3x^2+3x-6}{(2x+1)^2}$.
   (b) Étudier les variations de f et dresser le tableau des variations de f.
   Les valeurs exactes des extremums locaux sont attendues.
   (c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1.
   (d) Déterminer les abscisses des points de la courbe de f où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 6.6 (5 points).
Les briques de lait sont fabriquées à partir d'une feuille rectangulaire de longueur 32 cm et de largeur 24 cm selon un patron ayant la forme suivante :



Les pliages se font selon les pointillés, les parties hachurées servent au collage.

On appelle $V(x)$, en cm^3, le volume de la brique de lait en fonction de x, en cm.

1. Justifier que $x \in [0\,;16]$.
2. Montrer que $V(x) = x(24-x)(16-x)$.
3. Soit V' la fonction dérivée de V sur $[0\,;16]$.
   (a) Montrer que $V'(x) = 3x^2 - 80x + 384$.
   (b) En déduire le tableau des variations de V.
4. En déduire qu'il existe un x pour lequel le volume est maximal.
   On donnera une valeur approchée au millimètre de x et une valeur approchée du volume maximal en cm^3.

FIGURE 6.1: Courbe représentative Γ de la fonction f

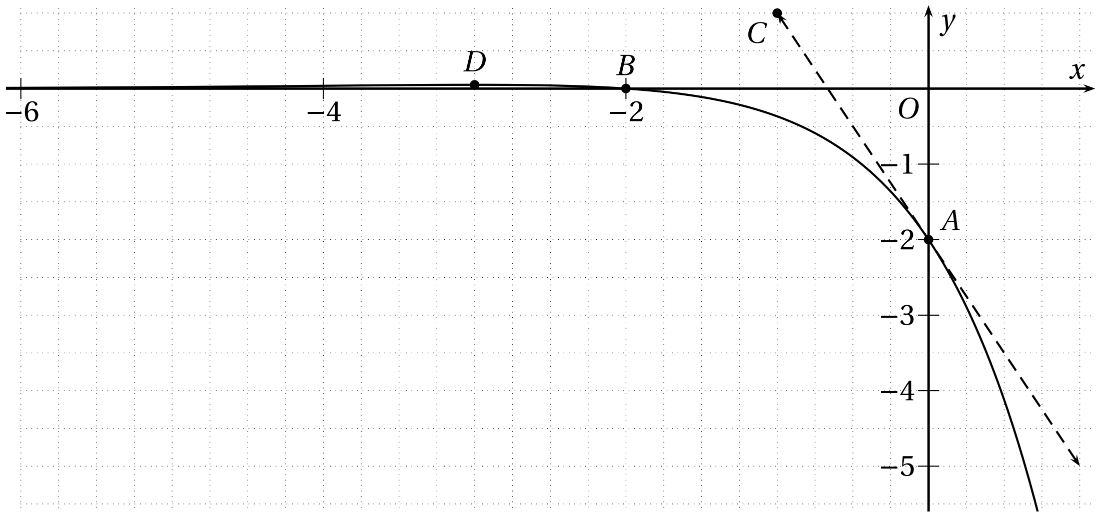


FIGURE 6.2: Courbes proposées pour f' ou g