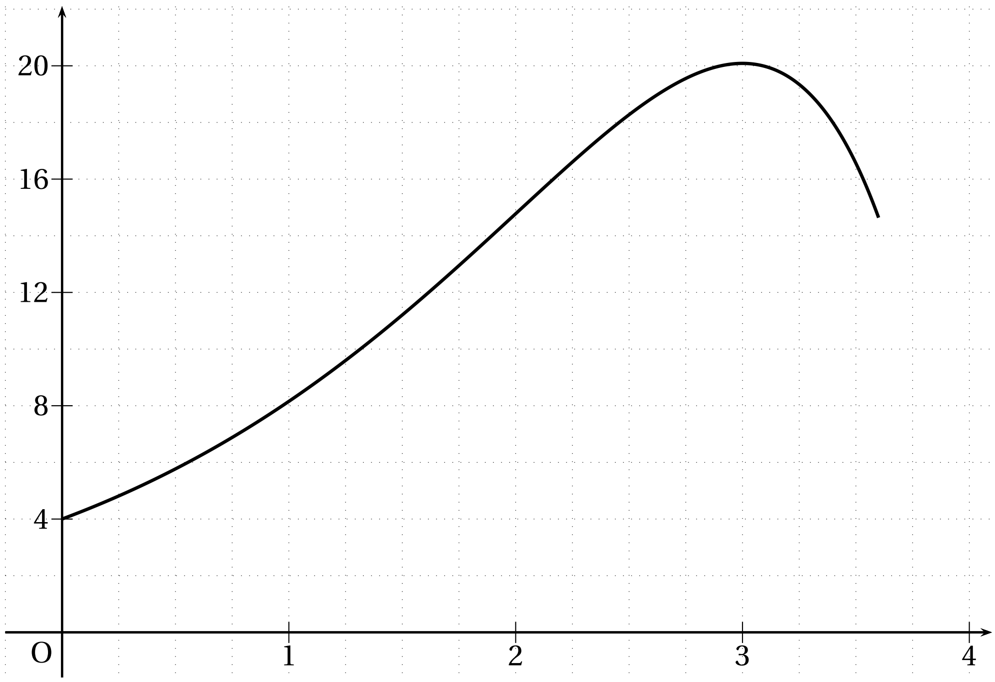
Devoir surveillé n° 4

Suites – Fonction exponentielle

L'énoncé est à rendre avec sa copie. Penser à écrire son nom en entête. Le barème est provisoire. Le devoir est noté sur 25.

EXERCICE 4.1 (12 points)**.**
La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

Partie A : Étude graphique d'une fonction.
On a représenté sur la figure ci-dessous une fonction f dans un repère du plan.
La courbe de f passe par le point $(0\,;4)$ et elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3



1. Donner, sans justifier, $f(0)$ et $f'(3)$.
2. On sait que la fonction f est de la forme $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$.
   Déterminer une expression de sa dérivée f' en fonction de a et b.
3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs de a et b et l'expression de f.

Partie B : Le contexte économique.
Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que tout le production est vendue. L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine.
On note x le nombre de **milliers de poulies** fabriquées et vendues en une semaine. x varie donc dans l'intervalle $I = [0\,;3,6]$.
Le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, hors frais fixe correspond à la fonction f représentée dans la partie A à laquelle il faut enlever les frais fixes s'élevant à 5 milliers d'euros. On obtient alors le bénéfice hebdomadaire, noté $\mathscr{B}(x)$, exprimé **en milliers d'euros**, qui vaut, pour tout $x \in I$:

$$\mathscr{B}(x) = -5 + (4-x)\mathrm{e}^x$$

1. (a) On note $\mathscr{B}'$ la fonction dérivée de la fonction $\mathscr{B}$.
   Montrer que pour tout réel $x \in I = [0\,;3,6]$, on a $\mathscr{B}'(x) = (3-x)\mathrm{e}^x$.

   (b) Déterminer le signe de la fonction dérivée $\mathscr{B}'$ sur l'intervalle I, puis dresser le tableau de variation de la fonction $\mathscr{B}$ sur cet intervalle en y indiquant les valeurs extrêmes (arrondies au dixième au besoin).

2. (a) Justifier que l'équation $\mathscr{B}(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle I.

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

3. En déduire le signe de $\mathscr{B}(x)$ selon les valeurs de x sur l'intervalle I.
4. Étudier, par le calcul, la convexité de $\mathscr{B}$ sur l'intervalle I.

Partie C : Interprétations économiques.
Déduire de la partie B les réponses aux questions suivantes (on indiquera précisément sur quelles réponses de la partie B on s'appuie).
Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.

1. Déterminer à partir de quelle production l'entreprise sera rentable.
2. Déterminer pour quelle production l'entreprise fera un bénéfice maximal et la la valeur de ce bénéfice maximal.
3. Déterminer à partir de quelle production la croissance du bénéfice va commencer à ralentir.

EXERCICE 4.2 (6 points)**.**
Les questions sont indépendantes. Toutes les réponses devront être justifiées. Les taux seront arrondis au centième.

1. Le livret d'épargne populaire bénéficie actuellement d'un taux d'intérêt annuel de 1,25 %.
   Meyriem compte y déposer ses économies et les y laisser pendant 10 ans.
   Anissa trouve que cela ne rapporte pas assez et elle voudrait disposer de la même somme que Meyriem mais en seulement 7 ans et demi.
   Quel est le taux du placement qu'elle doit trouver pour être satisfaite ?
2. À quel taux annuel faudrait-il placer un capital pour qu'il double en 10 ans et 3 mois ?
3. Le cours de l'action EDF a perdu 43 % en un an. Cela correspond à quelle taux de baisse mensuel moyen ?
4. En 2014 le PIB Chinois a augmenté de 7,4 % par rapport à l'année précédente. Si l'augmentation se maintient de la sorte tous les ans, combien faudra-t-il d'années pour que le PIB double ?

EXERCICE 4.3 (7 points - Sujet A).
Les questions de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, des affirmations sont proposées : une seule est exacte.
Cocher l'affirmation exacte pour chaque question, sachant qu'une affirmation exacte rapporte 1 point, l'absence d'affirmation, les affirmations multiples ou une affirmation fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

Un propriétaire d'appartement, original et mathématicien, propose le contrat de location suivant :
- le loyer est à payer mensuellement ;
- le premier loyer est de 500 € ;
- le loyer du mois suivant est égal à celui du mois précédent diminué de 5 % auquel on ajoute 35 €.

On note u_n le loyer du mois de rang n en commençant par $u_0 = 500$.

Partie A. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 35$.
On considère la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 700$.

1. La suite (u_n) est
   - ☐ seulement arithmétique
   - ☐ arithmétique et géométrique
   - ☐ seulement géométrique
   - ☐ ni arithmétique, ni géométrique

2. La suite (v_n) est
   - ☐ arithmétique de raison -700 et de premier terme $v_0 = 500$
   - ☐ arithmétique de raison -700 et de premier terme $v_0 = -200$
   - ☐ géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = 500$
   - ☐ géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = -200$

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u PREND LA VALEUR 500
n PREND LA VALEUR 0
TANT QUE u < 650
 n PREND LA VALEUR n+1
 u PREND LA VALEUR 0,95u + 35
FIN TANT QUE
AFFICHER n
```

   Cet algorithme permet d'obtenir :
   - ☐ la valeur de u_{650}
   - ☐ la somme des 650 premiers termes de (u_n)
   - ☐ le plus petit rang n pour lequel on a $u_n \geqslant 650$
   - ☐ le nombre de termes de (u_n) inférieurs à 650

4. La valeur affichée par l'algorithme de la question 3 est :
   - ☐ 27
   - ☐ 28
   - ☐ 700
   - ☐ 652,43

5. On propose ci-dessous 4 algorithmes. Lequel permet d'afficher exactement les 10 premiers loyers ?

   ☐
```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
 u PREND LA VALEUR 0,95u+35
 AFFICHER u
FIN POUR
```
   ☐
```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
 AFFICHER u
 u PREND LA VALEUR 0,95u+35
FIN POUR
```
   ☐
```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
 u PREND LA VALEUR 0,95u+35
FIN POUR
AFFICHER u
```
   ☐
```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 11
 AFFICHER u
 u PREND LA VALEUR 0,95u+35
FIN POUR
```

Partie B. On admet pour la suite que, pour tout entier naturel n, $u_n = -200 \times 0,95^n + 700$

1. La suite (u_n) a pour limite
   - ☐ $+\infty$
   - ☐ 0
   - ☐ 700

2. La suite (u_n)
   - ☐ est croissante
   - ☐ est décroissante
   - ☐ n'est pas monotone

EXERCICE 4.3 (7 points - Sujet B).

Les questions de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, des affirmations sont proposées : une seule est exacte.
Cocher l'affirmation exacte pour chaque question, sachant qu'une affirmation exacte rapporte 1 point, l'absence d'affirmation, les affirmations multiples ou une affirmation fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

Un propriétaire d'appartement, original et mathématicien, propose le contrat de location suivant :

- le loyer est à payer mensuellement ;
- le premier loyer est de 500 € ;
- le loyer du mois suivant est égal à celui du mois précédent diminué de 5 % auquel on ajoute 35 €.

On note u_n le loyer du mois de rang n en commençant par $u_0 = 500$.

Partie A. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 35$.
On considère la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 700$.

1. La suite (u_n) est
   - ☐ arithmétique et géométrique
   - ☐ seulement arithmétique
   - ☐ ni arithmétique, ni géométrique
   - ☐ seulement géométrique
2. La suite (v_n) est
   - ☐ arithmétique de raison -700 et de premier terme $v_0 = 500$
   - ☐ géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = 500$
   - ☐ arithmétique de raison -700 et de premier terme $v_0 = -200$
   - ☐ géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = -200$
3. On propose ci-dessous 4 algorithmes. Lequel permet d'afficher exactement les 10 premiers loyers ?

☐
```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
 AFFICHER u
 u PREND LA VALEUR 0,95u+35
FIN POUR
```
☐
```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 11
 AFFICHER u
 u PREND LA VALEUR 0,95u+35
FIN POUR
```
☐
```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
 u PREND LA VALEUR 0,95u+35
FIN POUR
AFFICHER u
```
☐
```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
 u PREND LA VALEUR 0,95u+35
 AFFICHER u
FIN POUR
```

4. On considère l'algorithme suivant :

```
u PREND LA VALEUR 500
n PREND LA VALEUR 0
TANT QUE u < 650
 n PREND LA VALEUR n+1
 u PREND LA VALEUR 0,95u + 35
FIN TANT QUE
AFFICHER n
```

Cet algorithme permet d'obtenir :
   - ☐ le nombre de termes de (u_n) inférieurs à 650
   - ☐ le plus petit rang n pour lequel on a $u_n \geqslant 650$
   - ☐ la somme des 650 premiers termes de (u_n)
   - ☐ la valeur de u_{650}

5. La valeur affichée par l'algorithme de la question 4 est :
   - ☐ 700
   - ☐ 652,43
   - ☐ 27
   - ☐ 28

Partie B. On admet pour la suite que, pour tout entier naturel n, $u_n = -200 \times 0,95^n + 700$

1. La suite (u_n)
   - ☐ est décroissante
   - ☐ est croissante
   - ☐ n'est pas monotone
2. La suite (u_n) a pour limite
   - ☐ $+\infty$
   - ☐ 700
   - ☐ 0