Un corrigé du devoir maison n°2

Soit f une fonction affine de la forme $f(x) = mx + p$ où m est un réel différent de 0 et 1 et p un réel quelconque.
Soit (u_n) la suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A : Étude théorique

1. Déterminer, en fonction de m et de p, le nombre q tel que $f(q) = q$.

   $f(q) = q \Leftrightarrow mq + p = q \Leftrightarrow p = q - mq \Leftrightarrow p = q(1-m) \Leftrightarrow q = \frac{p}{1-m}$ car $m \neq 1$.

2. Montrer que la suite (v_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - q$ est géométrique.

   $v_{n+1} = u_{n+1} - q = mu_n + p - q$ or, comme $mq + p = q$, alors $p - q = -mq$.
   Donc $v_{n+1} = mu_n - mq = m(u_n - q) = mv_n$.
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison m.

3. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de u_0, m, p et n.

   Étant géométrique, on a $v_n = v_0 \times m^n = (u_0 - q)m^n = \left(u_0 - \frac{p}{1-m}\right)m^n$.
   Par ailleurs $v_n = u_n - q \Leftrightarrow u_n = v_n + q = \left(u_0 - \frac{p}{1-m}\right)m^n + \frac{p}{1-m}$.

Partie B : Application

Medhi a le projet de partir 1 an en voyage en vélo. Pour cela, il souhaite acquérir un vélo et l'équiper pour créer ce que les spécialistes appellent une *randonneuse*.

Il estime le coût final de son véhicule à 2 000 €. Le 1er janvier 2016, il compte déposer toutes ses économies, à savoir 500 €, sur un livret d'épargne populaire, à intérêts composés, rémunéré à 1,25 % par an.
Il décide de plus de s'astreindre à déposer chaque 1er janvier des années suivantes 100 € sur ce livret. Il se demande quand il pourra partir.
Pour répondre à cette question, on pose u_n la somme disponible sur son compte le 1er janvier de l'année $2016 + n$.

Les résultats seront, au besoin, arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,0125u_n + 100$.

   $u_{n+1} = u_n + \frac{1,25}{100}u_n + 100 = u_n\left(1 + \frac{1,25}{100}\right) + 100 = 1,0125u_n + 100$.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

   $u_0 = 500$, $u_1 = 606,25$, $u_2 \approx 713,83$.
   $u_1 - u_0 = 106,25 \neq u_2 - u1 \approx 107,58$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
   $\frac{u_1}{u_0} = 1,2125 \neq \frac{u_2}{u_1} \approx 1,1774$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

3. (a) Déterminer la suite (v_n) auxiliaire de (u_n).

   On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 1,0125x + 100$ qui est bien de la forme $f(x) = mx + p$.
   On sait que, dans ce cas, la suite auxiliaire est telle que $v_n = u_n - q$.
   Or $q = \frac{p}{1-m} = \frac{100}{1-1,0125} = -8000$.
   Donc $v_n = u_n + 8000$.

   (b) Montrer que (v_n) est géométrique.

   $v_{n+1} = u_{n+1} + 8000 = 1,0125u_n + 8100 = 1,0125(u_n + 8000) = 1,0125v_n$.
   (v_n) est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + 8000 = 8500$ et de raison $q = 1,0125$.

   (c) En déduire l'expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.

Étant géométrique $v_n = v_0 \times q^n = 8\,500 \times 1,0125^n$.
Par ailleurs $v_n = u_n + 8\,000 \Leftrightarrow u_n = v_n - 8\,000 = 8\,500 \times 1,0125^n - 8\,000$.

4. (a) Étudier la monotonie de (u_n).

Comme $1,0125 > 1$ alors :

$$\begin{array}{rcl} 1,0125^n & < & 1,0125^{n+1} \\ 8\,500 \times 1,0125^n & < & 8\,500 \times 1,0125^{n+1} \\ 8\,500 \times 1,0125^n - 8\,000 & < & 8\,500 \times 1,0125^{n+1} - 8\,000 \\ u_n & < & u_{n+1} \end{array}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

(b) Déterminer à quelle date il pourra partir.

À la calculatrice on obtient : $u_{13} \approx 1\,989{,}74 < 2\,000 < u_{14} \approx 2\,114{,}62$.
Comme la suite (u_n) est croissante, on peut alors affirmer que c'est à partir de $n = 14$ qu'il aura assez d'argent pour partir, soit en $2016 + 14 = 2030$.