Un corrigé du devoir surveillé n°4

QUESTION DE COURS (2 points)
Montrer que la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$. Alors $a - b < 0$.
Mais $a-b = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$.
On sait que $a-b$ est strictement négatif.
On sait aussi que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont tous les deux positifs (strictement pour $\sqrt{b}$) donc $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ est strictement positif.
Alors $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ est strictement négatif.
$\sqrt{a}-\sqrt{b} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
$\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ étant dans le même ordre que a et b, la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE 1 (9 points)**.**
Medhi a le projet de partir 1 an en voyage en vélo. Pour cela, il souhaite acquérir un vélo et l'équiper pour créer ce que les spécialistes appellent une *randonneuse*.
Il estime le coût final de son véhicule à 1 500 €. Le 1er janvier 2016, il compte déposer toutes ses économies, à savoir 500 €, sur un livret d'épargne populaire, à intérêts composés, rémunéré à 1,25 % par an. Il décide de plus de s'astreindre à déposer chaque 1er janvier des années suivantes 100 € sur ce livret.

Il se demande quand il pourra partir.
Pour répondre à cette question, on pose u_n la somme disponible sur son compte le 1er janvier de l'année $2016+n$. On a donc $u_0 = 500$.
Les résultats seront, au besoin, arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}0125u_n + 100$.

   $u_{n+1} = u_n + \frac{1{,}25}{100}u_n + 100 = \left(1+\frac{1{,}25}{100}\right)u_n + 100 = 1{,}0125u_n + 100$.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? *Justifier.*

   $u_0 = 500$, $u_1 = 1{,}0125u_0 + 100 = 606{,}25$ et $u_2 = 1{,}0125u_1 + 100 \approx 713{,}83$.
   $u_1 - u_0 = 106{,}25 \neq u_2 - u_1 \approx 107{,}58$, la suite n'est donc pas arithmétique.
   $u_1 : u_0 = 1{,}2125 \neq u_2 : u_1 \approx 1{,}1774$, la suite n'est donc pas géométrique.

3. On pose $v_n = u_n + 8000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   $v_{n+1} = u_{n+1} + 8000 = 1{,}0125u_n + 100 + 8000 = 1{,}0125u_n + 8100 = 1{,}0125(u_n + 8000) = 1{,}0125v_n$.
   La suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + 8000 = 8500$ et de raison $q = 1{,}0125$.

   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

   Étant géométrique, $v_n = v_0 \times q^n = 8500 \times 1{,}0125^n$.

   (c) En déduire que $u_n = 8500 \times 1{,}0125^n - 8000$.

   $v_n = 8500 \times 1{,}0125^n = u_n + 8000 \Leftrightarrow u_n = 8500 \times 1{,}0125^n - 8000$.

4. (a) Montrer que, quel que soit n, $u_n < u_{n+1}$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

   $1 < 1{,}0125 \Leftrightarrow 1{,}0125^n < 1{,}0125^{n+1} \Leftrightarrow 8500 \times 1{,}0125^n < 8500 \times 1{,}0125^{n+1} \Leftrightarrow 8500 \times 1{,}0125^n - 8000 < 8500 \times 1{,}0125^{n+1} - 8000 \Leftrightarrow u_n < u_{n+1}$.
   La suite (u_n) est donc croissante.

   (b) Déterminer quelle année il pourra partir.

   D'après la calculatrice, $u_8 \approx 1388{,}13 < 1500 < u_9 \approx 1505{,}48$. On a vu de plus que la suite (u_n) est croissante, donc c'est à partir de $n = 9$, c'est-à-dire en 2025, qu'il pourra partir.

5. On propose ci-dessous 3 algorithmes.

Algorithme 1 :

```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
AFFICHER u
u PREND LA VALEUR 1,0125u+100
FIN POUR
```

Algorithme 2 :

```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
u PREND LA VALEUR 1,0125u+100
FIN POUR
AFFICHER u
```

Algorithme 3 :

```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
u PREND LA VALEUR 1,0125u+100
AFFICHER u
FIN POUR
```

Indiquer ceux qui ne permettent pas d'afficher exactement le montant des économies disponibles les 10 premières années en justifiant.

Les 3 algorithmes comportent une boucle *pour* qui va executer les instructions de la boucle 10 fois.
L'algorithme 2 affiche u une seule fois puisque cet affichage se situe en dehors de la boucle. Il ne va donc afficher que le dernier terme calculé soit u_{10}. Il ne convient donc pas.
L'algorithme 3 affiche u dans la boucle, donc il affichera bien 10 termes consécutifs de la suite malheureusement il n'affiche pas u_0 mais seulement $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ car il calcule u_1 avant d'afficher. Il ne convient donc pas.
L'algorithme 1 affiche u dans la boucle, donc il affichera bien 10 termes consécutifs de la suite en commençant par u_0 et en s'arrêtant à u_9, ce qui correspond bien aux économies disponibles les 10 premières années.

EXERCICE 2 (7 points)**.**
f est une fonction définie sur $[-10; 10]$ et son tableau de variations est le suivant :

x	-10		-1		2		8		10
f	4	↘	1	↗	9	↘	-5	↗	-1

On sait de plus que $f(3) = 0$.

Pour chacune des fonctions suivantes :

(a) Donner son ensemble de définition. *On justifiera s'il n'est pas le même que celui de f.*

(b) Donner son tableau des variations. *On justifiera systématiquement.*

1. $g = f - 3$

(a) $\mathscr{D}_g = \mathscr{D}_f = [-10; 10]$.

(b) f et $f + k$ ont les mêmes variations donc :

x	-10		-1		2		8		10
g	1	↘	-2	↗	6	↘	-8	↗	-4

2. $h = 2f$

(a) $\mathscr{D}_h = \mathscr{D}_f = [-10; 10]$.

(b) f et kf ont les mêmes variations quand $k > 0$ et ici $k = 2$ donc :

x	-10		-1		2		8		10
h	8	↘	2	↗	18	↘	-10	↗	-2

3. $i = -3f$

   (a) $\mathscr{D}_i = \mathscr{D}_f = [-10\,;\,10]$.

   (b) f et kf ont des variations opposées quand $k < 0$ et ici $k = -3$ donc :

x	-10		-1		2		8		10
i			-3				15		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	-12				-27				3

4. $j = \sqrt{f}$

   (a) $\sqrt{f}$ n'est définie que lorsque $f \geqslant 0$ donc $\mathscr{D}_j = [-10\,;\,3]$.

   (b) f et $\sqrt{f}$ ont les mêmes variations donc :

x	-10		-1		2		3
j	2				3		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			1				0

5. $k = \frac{1}{f}$

   (a) $\frac{1}{f}$ n'est pas définie lorsque $f = 0$ donc $\mathscr{D}_k = [-10\,;\,3[\cup]3\,;\,10]$.

   (b) f et $\frac{1}{f}$ ont des variations opposées donc :

x	-10		-1		2		3		8		10
k			1				$\Vert$		$-\frac{1}{5}$		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	
	$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{9}$		$\Vert$				-1

6. $\ell = |f|$

   (a) $\mathscr{D}_\ell = \mathscr{D}_f = [-10\,;\,10]$.

   (b) $|f| = f$ quand $f \geqslant 0$ donc sur $[-10\,;\,3]$ où $|f|$ et f ont les mêmes variations et $|f| = -f$ quand $f \leqslant 0$ donc sur $[3\,;\,10]$ où $|f|$ et f des variations opposées car $|f| = kf$ avec $k = -1 < 0$ donc :

x	-10		-1		2		3		8		10
ℓ	4				9				5		
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			1				0				1

EXERCICE 3 (7 points).

On se propose d'étudier quelques caractéristiques de la fonction f définie par : $f : x \longmapsto \frac{4x^2-14x+6}{2x-5}$ ou de sa courbe $\mathscr{C}$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;\,\frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}\,;\,+\infty[$ par : $g : x \longmapsto -\frac{4}{2x-5}$.

Montrer que g est croissante $]\frac{5}{2}\,;\,+\infty[$

Soit a et b deux réels de $]\frac{5}{2}\,; +\infty[$ tels que $a < b$.
$\frac{5}{2} < a < b \Leftrightarrow 5 < 2a < 2b \Leftrightarrow 0 < 2a-5 < 2b-5 \Leftrightarrow \frac{1}{2a-5} > \frac{1}{2b-5}$ (car $2a-5$ et $2b-5$ tous deux strictement positifs) $\Leftrightarrow -\frac{4}{2a-5} < -\frac{4}{2b-5}$ (multiplication par -4) $\Leftrightarrow g(a) < g(b)$ donc g est croissante sur $]\frac{5}{2}\,; +\infty[$.

On admettra qu'elle l'est aussi sur $]-\infty\,; \frac{5}{2}[$.

Partie B : Étude de f

1. Déterminer $\mathscr{D}$, le domaine de définition de f.

   f n'est pas définie quand $2x-5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ donc $\mathscr{D} =]-\infty\,; \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}\,; +\infty[$.

2. Montrer que $f(x) = 2x - 2 - \frac{4}{2x-5}$ pour $x \in \mathscr{D}$.

   $2x-2-\frac{4}{2x-5} = \frac{(2x)(2x-5)}{2x-5} - \frac{2(2x-5)}{2x-5} - \frac{4}{2x-5} = \frac{4x^2-10x-4x+10-4}{2x-5} = \frac{4x^2-14x+6}{2x-5} = f(x)$.

3. En déduire les variations de f sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}$.

   $f = h + g$ où g est, on l'a vu dans la partie A, croissante sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}$ et où $h : x \longmapsto 2x-2$ est une fonction affine croissante sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}$.
   f étant la somme de deux fonctions croissantes sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}$, elle est aussi croissante sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}$.

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels entre $\mathscr{C}$ et chacun des axes du repère.

   - $M(x\,; y) \in \mathscr{C} \cap (0y) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4x^2-14x+6}{2x-5} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{6}{5} \end{cases}$ donc $\mathscr{C} \cap (0y) = \left\{\left(0\,; -\frac{6}{5}\right)\right\}$.
   - $M(x\,; y) \in \mathscr{C} \cap (0x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4x^2-14x+6}{2x-5} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{4x^2-14x+6}{2x-5} = 0 \end{cases}$ or $\frac{4x^2-14x+6}{2x-5} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 14x + 6$ et $2x-5 \neq 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$ donc $\mathscr{C} \cap (0x) = \left\{\left(\frac{1}{2}\,; 0\right)\,; (3\,; 0)\right\}$.

5. **Question bonus (hors barème)**
   Soit Δ la droite d'équation $y = -2x + 10$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de Δ.

   Étudions, par exemple, le signe de $f(x) - (-2x+10)$.
   $f(x) - (-2x+10) = \frac{4x^2-14x+6}{2x-5} - \frac{(-2x+10)(2x-5)}{2x-5} = \frac{4x^2-14x+6+4x^2-30x+50}{2x-5} = \frac{8x^2-44x+56}{2x-5}$.
   $2x-5$ est une expression affine s'annulant en $\frac{5}{2}$, négative avant, positive après.
   $8x^2 - 44x + 56$ est un trinôme positif sauf entre ses racines 2 et $\frac{7}{2}$.
   D'où :

x	$-\infty$		2		$\frac{5}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$8x^2-44x+56$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-(-2x+10)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

   Donc :
   - Sur $]-\infty\,; 2]\cup]\frac{5}{2}\,; \frac{7}{2}]$: $f(x) - (-2x+10) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant 2x+10 \Leftrightarrow \mathscr{C}$ est sous Δ
   - Sur $[2\,; \frac{5}{2}[\cup[\frac{7}{2}\,; +\infty[$ $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ