Nom : *Jeudi 10 décembre 2015 – 2h00*

Devoir surveillé n°4

Suites – Généralités sur les fonctions

L'énoncé est à rendre avec sa copie. *Penser à écrire son nom en entête.*
Le barème n'est qu'indicatif (le devoir est noté sur 25 points).

QUESTION DE COURS (2 points)
Montrer que la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

EXERCICE 1 (9 points)**.**
Medhi a le projet de partir 1 an en voyage en vélo. Pour cela, il souhaite acquérir un vélo et l'équiper pour créer ce que les spécialistes appellent une *randonneuse*.

Il estime le coût final de son véhicule à 1 500 €. Le 1er janvier 2016, il compte déposer toutes ses économies, à savoir 500 €, sur un livret d'épargne populaire, à intérêts composés, rémunéré à 1,25 % par an. Il décide de plus de s'astreindre à déposer chaque 1er janvier des années suivantes 100 € sur ce livret.

Il se demande quand il pourra partir.
Pour répondre à cette question, on pose u_n la somme disponible sur son compte le 1er janvier de l'année $2016+n$. On a donc $u_0 = 500$.
Les résultats seront, au besoin, arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,0125u_n + 100$.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? *Justifier.*
3. On pose $v_n = u_n + 8000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que $u_n = 8500 \times 1,0125^n - 8000$.
4. (a) Montrer que, quel que soit n, $u_n < u_{n+1}$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
   (b) Déterminer quelle année il pourra partir.
5. On propose ci-dessous 3 algorithmes.

Algorithme 1 :

```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
AFFICHER u
u PREND LA VALEUR 1,0125u+100
FIN POUR
```

Algorithme 2 :

```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
u PREND LA VALEUR 1,0125u+100
FIN POUR
AFFICHER u
```

Algorithme 3 :

```
u PREND LA VALEUR 500
POUR k ALLANT de 1 A 10
u PREND LA VALEUR 1,0125u+100
AFFICHER u
FIN POUR
```

Indiquer ceux qui ne permettent pas d'afficher exactement le montant des économies disponibles les 10 premières années en justifiant.

EXERCICE 2 (6,5 points).
f est une fonction définie sur $[-10\,;10]$ et son tableau de variations est le suivant :

x	-10		-1		2		8		10
f	4	↘	1	↗	9	↘	-5	↗	-1

On sait de plus que $f(3) = 0$.

Pour chacune des fonctions suivantes :

(a) Donner son ensemble de définition. *On justifiera s'il n'est pas le même que celui de f.*

(b) Donner son tableau des variations. *On justifiera systématiquement.*

1. $g = f - 3$
2. $h = 2f$
3. $i = -3f$
4. $j = \sqrt{f}$
5. $k = \frac{1}{f}$
6. $\ell = |f|$

EXERCICE 3 (7,5 points).
On se propose d'étudier quelques caractéristiques de la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{4x^2 - 14x + 6}{2x - 5}$$

ou de sa courbe $\mathscr{C}$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;\frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}\,;+\infty[$ par :

$$g : x \longmapsto -\frac{4}{2x-5}$$

Montrer que g est croissante $]\frac{5}{2}\,;+\infty[$
On admettra qu'elle l'est aussi sur $]-\infty\,;\frac{5}{2}[$.

Partie B : Étude de f

1. Déterminer $\mathscr{D}$, le domaine de définition de f.
2. Montrer que $f(x) = 2x - 2 - \frac{4}{2x-5}$ pour $x \in \mathscr{D}$.
3. En déduire les variations de f sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}$.
4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels entre $\mathscr{C}$ et chacun des axes du repère.
5. **Question bonus (hors barème)**
   Soit Δ la droite d'équation $y = -2x + 10$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de Δ.