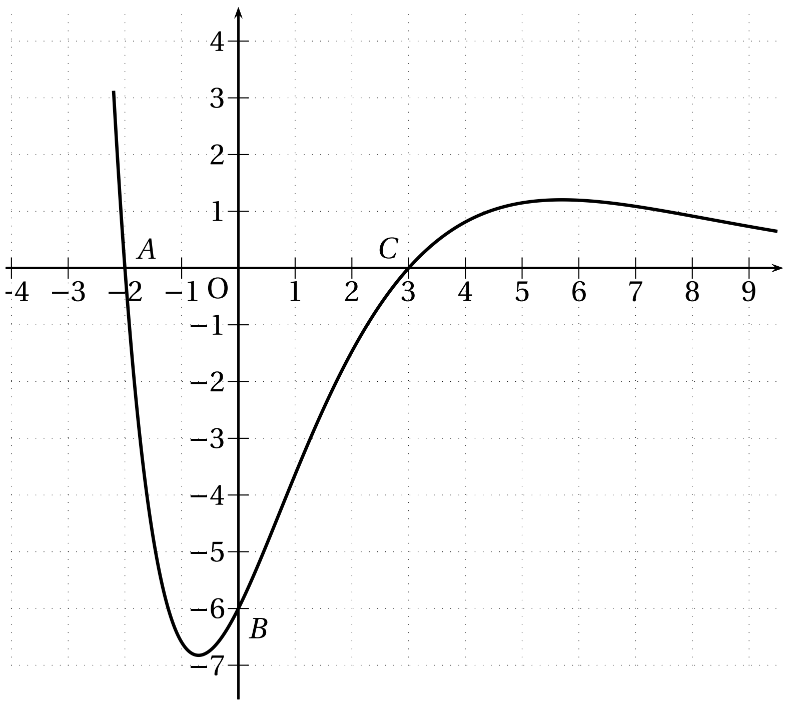
Devoir surveillé n° 3

Convexité – Suites

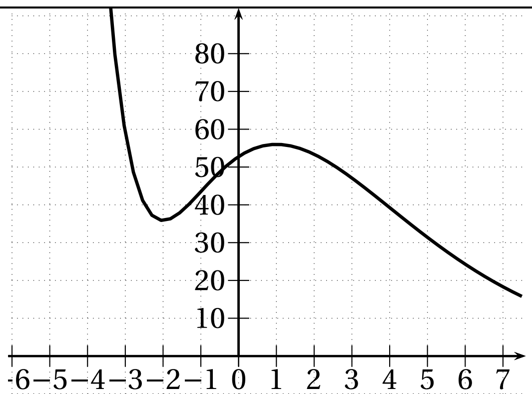
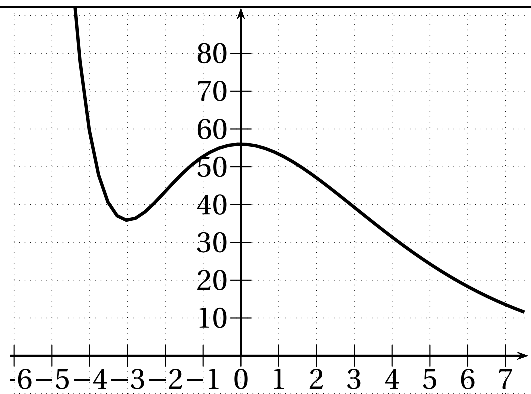
EXERCICE 3.1 (4 points)**.**
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : $A(-2\,;0)$; $B(0\,;-6)$ et $C(3\,;0)$.



Courbe représentative de la fonction f''

Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur $[-2\,;3]$, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1	Courbe 2
	

Exercice 3.2 (8 points).
Sans précision contraire, les prix seront au besoin arrondis au centime.

Un généalogiste veut acheter un logiciel spécialisé accompagné d'un contrat d'assistance.
On lui propose de choisir entre deux contrats.

Partie A : 1^er contrat.
En 2012, le coût est de 189 €, puis, chaque année, le coût baisse de 8 € par rapport à l'année précédente.
On note u_n le coût en euros en $2012 + n$. Ainsi $u_0 = 189$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. (a) Déterminer la nature de la suite (u_n).
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
3. À partir de quelle année le montant de l'assistance sera-t-il inférieur à 150 € ? *Justifier.*
4. Calculer à 0,1 % près les pourcentages de baisse entre 2012 et 2013 puis entre 2018 et 2019. Les comparer et expliquer.
5. On donne l'algorithme ci-contre.
   (a) Indiquer ce qu'il affiche pour $n = 15$.
   (b) Interpréter ce résultat.

   On admet, pour la suite, que cet algorithme renvoie la valeur 1 155 pour $n = 6$.

```
ENTREE
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 189
   s PREND LA VALEUR 189
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n
     u PREND LA VALEUR u-8
     s PREND LA VALEUR s+u
   FIN POUR
SORTIES
   AFFICHER s
```

Partie B : 2^nd contrat.
En 2012, le coût est de 189 €, puis, chaque année, le coût baisse de 4 % par rapport à l'année précédente.
On note v_n le coût en euros en $2012 + n$.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. (a) Déterminer la nature de la suite (v_n).
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Calculer le coût en 2018.
3. Calculer la somme totale, à 1 € près, que le généalogiste aura dépensé s'il choisit le 2^nd contrat et l'arrête à la fin de l'année 2018.

Partie C : Comparaison.
Quel est le contrat le moins coûteux pour le généalogiste, s'il l'arrête à la fin de l'année 2018 ? *Justifier.*

EXERCICE 3.3 (8 points).
Sans précision contraire, les prix seront au besoin arrondis au centime.

Valentine place un capital c_0 dans une banque le 1er janvier 2014 au taux annuel de 2 %. À la fin de chaque année les intérêts sont ajoutés au capital, mais les frais de gestion s'élèvent à 25 € par an. On note c_n la valeur du capital au 1er janvier de l'année $2014+n$.

Partie A
On considère l'algorithme ci-dessous :

Initialisation
Affecter à N la valeur 0
Traitement
Saisir une valeur pour C
    Tant que $C < 2000$ faire
        Affecter à N la valeur $N+1$
        Affecter à C la valeur $1,02C-25$
    Fin Tant que
Sortie
Afficher N

1. (a) On saisit la valeur 1 950 pour C.
   Pour cette valeur de C, recopier le tableau ci-dessous et le compléter, en suivant pas à pas l'algorithme précédent et en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Valeur de N	0	1	2	...
Valeur de C	1 950			...

   (b) Quel est le résultat affiché par l'algorithme ?
   Dans le contexte de l'exercice, interpréter ce résultat.
2. Que se passerait-il si on affectait la valeur 1 250 à C ?

Partie B
Valentine a placé 1 900 € à la banque au 1er janvier 2014. On a donc $c_0 = 1900$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a : $c_{n+1} = 1,02c_n - 25$.
2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = c_n - 1250$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $c_n = 650 \times 1,02^n + 1250$.
3. Montrer que la suite (c_n) est croissante.
4. Déterminer, par la méthode de votre choix, le nombre d'années nécessaires pour que la valeur du capital dépasse 2 100 €.