Devoir maison n°5

Généralités sur les fonctions – Géométrie analytique

À rendre pour le jeudi 7 janvier 2016.

EXERCICE 5.1.
Soit $f : x \longmapsto x$, $g : x \longmapsto x^2$ définies sur $\mathbb{R}$ et $h : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ leurs courbes respectives.

1. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE 5.2.
Soit $f : x \longmapsto x^4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Conjecturer les variations de f à partir d'un grapheur (Geogebra par exemple).
2. Démontrer cette conjecture.
   Indication : factoriser $a^4 - b^4$ pourrait s'avérer utile.

PROBLÈME 5.1.
On a rappelé dans le devoir maison 3 que la médiatrice $\mathscr{D}$ d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points M situés à égale distance des deux extrémités du segment, ce qui peut se traduire par :

$$M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow AM = BM$$

On cherche dans ce problème à déterminer pour deux points A et B donnés quel est l'ensemble des points M tels que $2AM = BM$.

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé où les points A et B sont de coordonnées respectives $A(1;2)$ et $B(2;-1)$.
Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ de ce plan tels que $2AM = BM$.

1. Montrer que $\mathscr{S} \neq \varnothing$.
2. Montrer que $2AM = BM \Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + y^2 - 6y + 5 = 0$.
3. En déduire la nature de $\mathscr{S}$ en précisant ses caractéristiques.