Devoir maison n°4

Suites

À rendre pour le jeudi 3 décembre.

PROBLÈME 4.1.
Soit f une fonction affine de la forme $f(x) = mx + p$ où m est un réel différent de 0 et 1 et p un réel quelconque.
Soit (u_n) la suite telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A : Étude théorique

1. Déterminer, en fonction de m et de p, le nombre q tel que $f(q) = q$.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - q$ est géométrique.
   La suite (v_n) est appelée suite auxiliaire de la suite (u_n).
3. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de u_0, m, p et n.

Partie B : Application

Martin a le projet de partir 6 mois en voyage à la recherche de bons *spots* de surf. Pour cela, il souhaite acquérir un *van* et l'aménager. Il estime le coût final de son véhicule à 15 000 €.
Le 1$^{\text{er}}$ janvier 2014, il dépose 6 000 € sur un compte-épargne à intérêts composés rémunéré à 2,5 % par an. Il décide de plus de s'astreindre à déposer chaque 1$^{\text{er}}$ janvier des années suivantes 800 € sur ce compte.
Il se demande quand il pourra partir.
Pour répondre à cette question, on pose u_n la somme disponible sur son compte le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2014 + n$.

Les résultats seront, au besoin, arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,025u_n + 800$.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
3. (a) Déterminer la suite (v_n) auxiliaire de (u_n).
   (b) Montrer que (v_n) est géométrique.
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.
4. (a) Étudier la monotonie de (u_n).
   (b) Déterminer à quelle date il pourra partir.

PROBLÈME 4.2.
Soit la suite (u_n) définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Déterminer si la suite (u_n) est arithmétique ou géométrique.
2. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
   On admet que la suite (v_n) ainsi définie est définie pour tout entier n.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.
   (c) Étudier la monotonie de (u_n).