Devoir surveillé n° 10 : Un corrigé

EXERCICE 10.1 (8 points).

Dans le jeu « Casse-bonbons », il est possible, chaque jour, de tourner la « roue booster » afin d'obtenir un bonus. Cette roue est séparée en 8 secteurs identiques, chacun correspondant à un bonus différent, excepté le secteur nommé « Jackpot » qui correspond à l'obtention de plusieurs bonus en même temps (voir image ci-dessous).

Les résultats seront donnés au millième.

1. Quelle hypothèse peut-on émettre quant à la probabilité p que le tirage s'arrête sur le « Jackpot » ?

   1 secteur sur 8 correspond au jackpot ; il semble donc que $p = \frac{1}{8} = 0,125$.

2. David joue à tourner la roue environ 25 jours par mois.
   On appelle X le nombre de jackpots obtenus chaque mois.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.

   Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli où le succès est S : « Un jackpot est obtenu » et la probabilité du succès est $p = 0,125$.
   On procède à 25 tirages qui n'ont pas de raison de ne pas être identiques et indépendants, c'est donc un schéma de Bernoulli où $n = 25$.
   X est le nombre de succès. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,125$.

   (b) Justifier qu'on ne peut pas utiliser, dans ce cas, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

   Pour pouvoir l'utiliser il faut que $n \geqslant 25$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.
   Ici $n = 25 \geqslant 25$ et $n(1-p) = 25 \times 0,875 = 21,875 \geqslant 5$ mais $np = 25 \times 0,125 = 3,125 < 5$.
   On ne peut donc pas utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

   (c) Déterminer l'intervalle de fluctuation I au seuil de 95 % associé à la loi binomiale suivie par X.

   On sait que $I = \left[\frac{a}{n}\,;\frac{b}{n}\right]$ où :
   - a est le plus entier k tel que $p(X \leqslant k) > 0,025$
   - b est le plus entier k tel que $p(X \leqslant k) \geqslant 0,975$
   - $n = 25$, ici.

   D'après la calculatrice $a = 0$, $b = 7$ et, donc $I = \left[\frac{0}{25}\,;\frac{7}{25}\right] = [0\,;0,28]$.

   (d) Au mois d'avril, David n'a gagné aucune fois le jackpot.
   Que peut-on en conclure au seuil de 95 % ?

   La règle de décision est la suivante : « Si la fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation, on rejette l'hypothèse de départ ($p = 0,125$), au seuil de 95 % sinon on ne la rejette pas. »
   Ici la fréquence observée de jackpot est $f = \frac{0}{25} = 0 \in I$ donc on ne rejette pas l'hypothèse $p = 0,125$ (on ne la valide pas pour autant).

3. Claire joue à tourner la roue environ trois cents fois par an.
   On appelle Y le nombre de jackpots obtenus chaque année.

   (a) Justifier qu'on peut utiliser, dans ce cas, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Ici $n = 300 \geqslant 25$, $np = 300 \times 0,125 = 37,5 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 300 \times 0,875 = 262,5 \geqslant 5$ donc on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

(b) Donner cet intervalle J.

On sait que $J = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \approx [0,087 ; 0,163]$.
Remarque. On prend la valeur approchée par défaut pour la borne inférieure et la valeur approchée par excès pour la borne supérieure pour être sûr que cet intervalle contient au moins 95 % des fréquences.

(c) L'année dernière, Claire n'a gagné aucune fois le jackpot. Qu'en conclure ?

La règle de décision est la même que précédemment.
Ici la fréquence observée est $f = \frac{0}{300} = 0 \notin J$.
On peut donc affirmer, au seuil de 95 % que l'hypothèse de départ $p = 0,125$ est fausse.
Remarque. En fait, dès $n = 28$ l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % (qu'il soit asymptotique ou associé à la loi binomiale) ne contient plus la fréquence 0 ce qui signifie que, si au bout de 28 tirages, le jackpot n'a jamais été obtenu, on peut considérer que le jeu est truqué (au seuil de 95 %) – on notera que pour ce type de jeu en ligne il n'y a pas de réglementation.

EXERCICE 10.2 (3,5 points)**.**
Les valeurs exactes sont attendues.
Une étude affirme que 80 % des destinataires lisent le publipostage qu'ils reçoivent.

1. En admettant que ce résultat provienne d'une enquête sur un échantillon de 100 destinataires, déterminer l'intervalle de confiance au seuil de 95 % pour la proportion de destinataires qui lisent le publipostage.

   On sait que cet intervalle est $I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,8 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0,8 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0,7 ; 0,9]$.

2. Quel est l'amplitude de cet intervalle ?

   L'amplitude a est $a = 0,9 - 0,7 = 0,2$ soit 20 % d'amplitude.

3. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans la notation.*
   Quel devrait être l'effectif n de l'échantillon pour avoir une amplitude dix fois moindre ?

   D'une part, on remarque que l'amplitude a de l'intervalle de confiance est toujours $a = f + \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.
   D'autre part, pour que l'amplitude soit 10 fois moindre, il faut que $a = \frac{0,2}{10} = 0,02$.
   L'équation à résoudre est donc $\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,02 \Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{2}{0,02} = 100 \Leftrightarrow n = 100^2 = 10000$ (car n positif).

EXERCICE 10.3 (8,5 points)**.**
Sauf précision contraire, les résultats seront donnés au millième.
Une usine remplit des paquets de pâtes vendus comme contenant environ 500 g de pâtes.
Soit X le nombre de grammes effectivement contenus dans un tel paquet.
On admet que X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, μ et σ étant réglables, dans une certaine mesure, par l'usine.
La législation impose que le nombre de paquets contenant moins de 480 g soit inférieur à 1 pour mille.
Chaque paquet peut contenir au maximum 510 g de pâtes ; au-delà il déborde.

1. On suppose dans cette question que l'usine a réglé les paramètres de remplissage à $\mu = 500$ et $\sigma = 10$.

   (a) Déterminer $p(X \leqslant 480)$.
   Que peut-on en conclure quant au respect de la législation par cette usine ?

   $p(X \leqslant 480) = p(X \leqslant 500) - p(480 \leqslant X \leqslant 500) = 0,5 - p(480 \leqslant X \leqslant 500 \approx 0,022$.
   $0,022 > \frac{1}{1000} = 0,001$ donc, avec de tels réglages, la législation n'est pas respectée.

   (b) Déterminer la probabilité qu'un paquet déborde lors de son remplissage.

   $p(X \geqslant 510) = p(X \geqslant 500) - p(500 \leqslant X \leqslant 510) = 0,5 - p(500 \leqslant X \leqslant 510) \approx 0,159$.
   La probabilité qu'un paquet déborde lors de son remplissage est donc de 0,159, soit 15,9 %.

   (c) Déterminer la proportion de paquets qui respecteront la législation et qui ne déborderont pas.

   $p(480 \leqslant X \leqslant 510) \approx 0,819$
   La proportion de paquets respectant la législation et ne débordant pas sera de 0,819, soit 81,9 %.

2. On suppose dans cette question que l'usine a réglé l'écart-type à $\sigma = 15$.

   (a) À combien l'usine devra-t-elle régler l'espérance μ pour que le nombre de paquets contenant moins de 480 g soit exactement de 1 pour mille ? Justifier.

   On cherche la valeur de μ telle que $p(X \leqslant 480) = \frac{1}{1000} = 0,001$.
   Ne connaissant pas l'espérance, il nous faut passer par la loi normale centrée et réduite : $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-\mu}{15}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et $p(X \leqslant 480) = 0,001 \Leftrightarrow p\left(\frac{X-\mu}{15} \leqslant \frac{480-\mu}{15}\right) = 0,001$.
   D'après la calculatrice, on a alors $\frac{480-\mu}{15} \approx -3,090 \Leftrightarrow \mu \approx 526,353$.
   Remarque. Donc, avec un écart-type de $\sigma = 15$, en deça de $\mu = 526,353$, la législation ne sera pas respectée et au-delà elle le sera.

   (b) Quel sera dans ce cas la proportion de paquets qui déborderont lors de leur remplissage ?

   $p(X \geqslant 510) = p(X \geqslant 526,353) + p(510 \leqslant X \leqslant 526,353) = 0,5 + +p(510 \leqslant X \leqslant 526,353) \approx 0,862$.
   La proportion de paquets qui déborderont sera de 0,862 soit 86,2 %, soit un très mauvais réglage.

3. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans la notation.*
   À combien l'usine devrait-elle régler les paramètres de remplissage μ et σ pour que nombre de paquets contenant moins de 480 g soit exactement de 1 pour mille et que le nombre de paquets débordant lors de leur remplissage soit exactement de 1 % ? Justifier.
   On arrondira les calculs intermédiaires et les résultats finaux au dixième.

On doit avoir :

- $p(X \leqslant 480) = 0,001$
- $p(X \geqslant 510) = 0,01 \Leftrightarrow p(X \leqslant 510) = 0,99$

Ne connaissant ni l'espérance, ni l'écart-type, il nous faut passer par la loi normale centrée et réduite : $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Les conditions à respecter deviennent :

- $p(X \leqslant 480) = 0,001 \Leftrightarrow p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{480-\mu}{\sigma}\right) = 0,001$
- $p(X \leqslant 510) = 0,99 \Leftrightarrow p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{510-\mu}{\sigma}\right) = 0,99$

D'après la calculatrice, on obtient : $\left\{\begin{array}{l}\frac{480-\mu}{\sigma} \approx -3,1\\ \frac{510-\mu}{\sigma} \approx 2,3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mu - 3,1\sigma \approx 480\\ \mu + 2,3\sigma \approx 510\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mu \approx 497,4\\ \sigma \approx 5,6\end{array}\right.$.

Il faudrait donc régler l'espérance sur environ 497,4 g et l'écart-type sur environ 5,6 g pour respecter ces deux conditions.