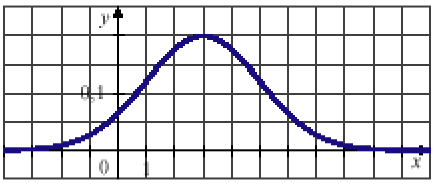
T ES 07/05/2015 **DS N° 9 SUJET B** **NOM:**

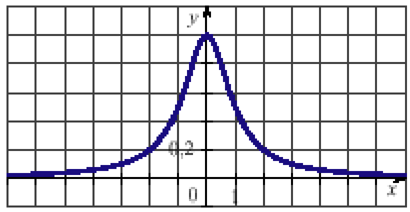
Le barème, donné à titre indicatif, tient compte du soin, de la propreté et de la qualité de la rédaction des exercices

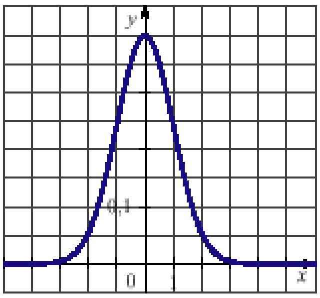
Exercice 1 : *(5 pts)*

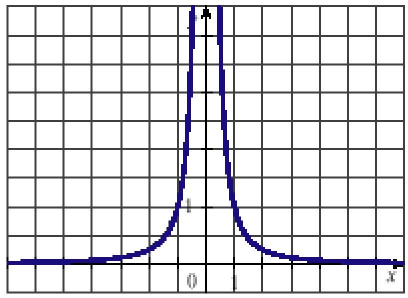
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des cinq questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.
Une bonne réponse rapporte 1 point Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Quelle courbe représente la fonction de densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$?

a.


b.


c.


d.


Pour relier une île au continent, les touristes doivent obligatoirement utiliser une des deux compagnies de ferries A ou B qui se partagent l'ensemble des transports vers cette île.
Une enquête de satisfaction réalisée auprès de touristes s'y étant rendus a produit les résultats suivants :

— 60 % des touristes se rendant sur l'île utilisent la compagnie A, les autres utilisent la compagnie B ;

— parmi les touristes ayant choisi la compagnie A pour se rendre sur l'île, 20 % sont satisfaits de leur transport ;

— 48 % de l'ensemble des touristes sont satisfaits du transport vers l'île.

On interroge au hasard un touriste s'étant rendu sur l'île :

2. La probabilité que ce touriste ait choisi la compagnie A et soit satisfait de son transport est :

a. 0,08 **b.** 0,12 **c.** 0,24 **d.** 0,88

3. La probabilité que ce touriste ait choisi la compagnie A sachant qu'il est satisfait de son transport est :

a. 0,34 **b.** 0,20 **c.** 0,25 **d.** 0,83

4. On choisit de modéliser le nombre de touristes satisfaits par le transport vers l'île parmi les 100 touristes choisis au hasard et de façon indépendante par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
La probabilité, selon ce modèle, qu'il y ait moins de 40 touristes satisfaits est, à 0,001 près :

a. 0,055 **b.** 0,309 **c.** 0,347 **d.** 0,374

5. La durée (en minutes) de la traversée entre le continent et l'île est modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[30;50]$.
La probabilité que la traversée entre le continent et l'île dure au moins 35 minutes est :

a. 0,25 **b.** 0,35 **c.** 0,70 **d.** 0,75

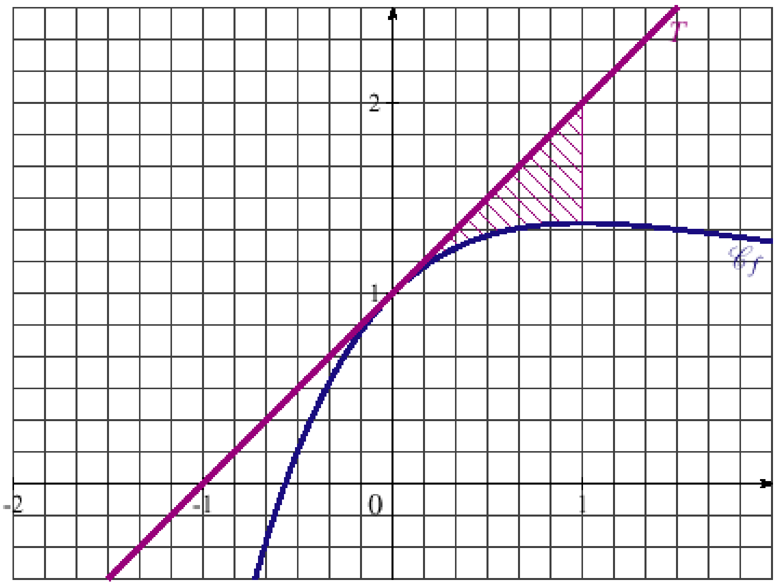
Exercice 2 : *(9 pts)*

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.

1. a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}(1-x)$.
   b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que l'équation $f(x)=0{,}5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[-1;0[$.
   b) Donner la valeur de α arrondie au millième.
3. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
4. L'objectif de cette question est de déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.
   À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x, l'expression et le signe de $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f.

	Instruction	Réponse
1	$f(x) = x * \exp(-x) + 1$	$xe^{-x} + 1$
2	$f''(x) =$ dérivée seconde $[f(x)]$	$e^{-x}(x-2)$
3	résoudre $[e^{-x}(x-2) \geqslant 0]$	$x \geqslant 2$

   a) Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction est convexe puis celui sur lequel elle est concave.
   c) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.
5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T dans un repère orthonormé.



   a) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{-x}(-1-x) + x$.
   Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ puis donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.

Exercice 3 : *(6 pts)*

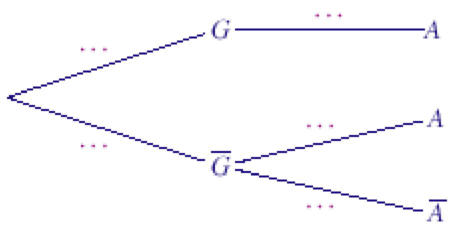
PARTIE A

Une société s'est intéressée à la probabilité qu'un de ses salariés, choisi au hasard, soit absent durant une semaine donnée de l'hiver 2014.
On a évalué à 0,07 la probabilité qu'un salarié ait la grippe une semaine donnée. Si le salarié a la grippe, il est alors absent.
Si le salarié n'est pas grippé cette semaine là, la probabilité qu'il soit absent est estimée à 0,04.
On choisit un salarié de la société au hasard et on considère les évènements suivants :

— G : le salarié a la grippe une semaine donnée ;

— A : le salarié est absent une semaine donnée.

1. Reproduire et compléter l'arbre en indiquant les probabilités de chacune des branches.



2. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A est égale à 0,1072.
3. Pour une semaine donnée, calculer la probabilité qu'un salarié ait la grippe sachant qu'il est absent. Donner un résultat arrondi au millième.

PARTIE B

On admet que le nombre de journées d'absence annuel d'un salarié peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 3{,}5$.

1. Calculer $p(7 \leqslant X \leqslant 21)$ arrondie au millième.
2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un salarié comptabilise au moins 10 journées d'absence dans l'année.