T ES 07/05/2015 **DS N° 9 SUJET A** **NOM:**

Le barème, donné à titre indicatif, tient compte du soin, de la propreté et de la qualité de la rédaction des exercices

Exercice 1 : *(5 pts)*

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.
Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.
Pour relier une île au continent, les touristes doivent obligatoirement utiliser une des deux compagnies de ferries A ou B qui se partagent l'ensemble des transports vers cette île.
Une enquête de satisfaction réalisée auprès de touristes s'y étant rendus a produit les résultats suivants :

— 60 % des touristes se rendant sur l'île utilisent la compagnie A, les autres utilisent la compagnie B ;

— parmi les touristes ayant choisi la compagnie A pour se rendre sur l'île, 20 % sont satisfaits de leur transport ;

— 48 % de l'ensemble des touristes sont satisfaits du transport vers l'île.

On interroge au hasard un touriste s'étant rendu sur l'île :

1. La durée (en minutes) de la traversée entre le continent et l'île est modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[30;50]$.
La probabilité que la traversée entre le continent et l'île dure au moins 35 minutes est :

a. 0,25 **b.** 0,35 **c.** 0,70 **d.** 0,75

2. On choisit de modéliser le nombre de touristes satisfaits par le transport vers l'île parmi les 100 touristes choisis au hasard et de façon indépendante par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
La probabilité, selon ce modèle, qu'il y ait moins de 40 touristes satisfaits est, à 0,001 près :

a. 0,055 **b.** 0,309 **c.** 0,347 **d.** 0,374

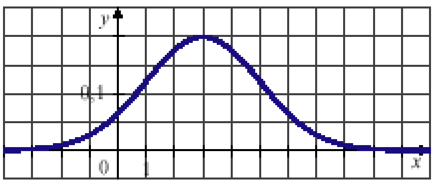
3. La probabilité que ce touriste ait choisi la compagnie A et soit satisfait de son transport est :

a. 0,08 **b.** 0,12 **c.** 0,24 **d.** 0,88

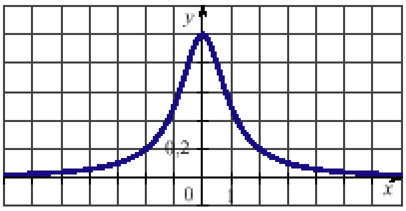
4. La probabilité que ce touriste ait choisi la compagnie A sachant qu'il est satisfait de son transport est :

a. 0,34 **b.** 0,20 **c.** 0,25 **d.** 0,83

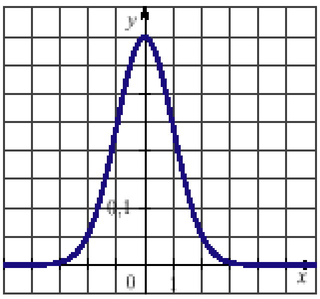
5. Quelle courbe représente la fonction de densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$?



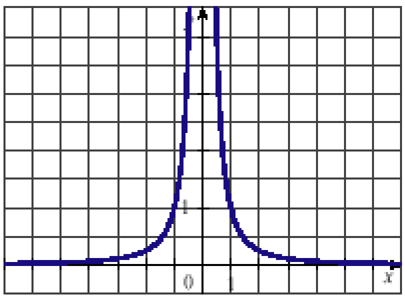
a.



b.



c.

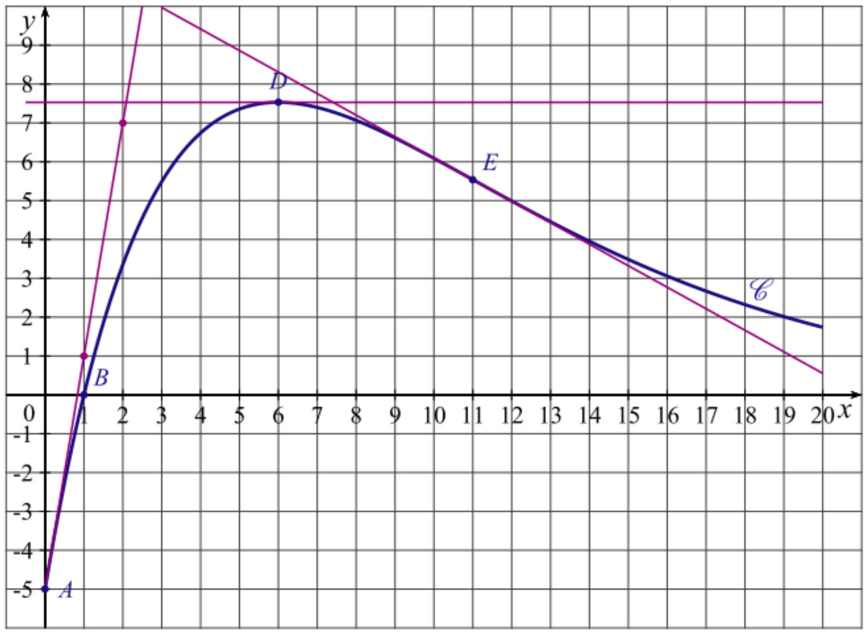


d.

Exercice 2 : *(9 pts)*

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$. On a tracé les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



PARTIE A

Par lecture graphique (aucune justification n'est demandée) :

1. Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.
2. Indiquer si la courbe C admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.

3. Déterminer un encadrement, d'amplitude minimale, par deux nombres entiers de $I = \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x.$

4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$. Préciser un encadrement de la (ou des) solution(s) à l'unité.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par

$$f(x) = (5x-5)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

1. Montrer que $f'(x) = (-x+6)\mathrm{e}^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;20]$.
2. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;20]$.

   b. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;20]$. On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(6)$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur $[0\,;6]$. Donner la valeur arrondie au millième de α.
4. **a.** Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;20]$ par $F(x) = (-25x-100)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $[0\,;20]$.

   b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;8]$. Donner sa valeur exacte.

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0\,;20]$. La fonction f des parties A et B modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6\,;\ 20]$ dont la valeur arrondie au millième est 13,903.

1. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4000 € ? (Arrondir à l'unité).
2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets.

   Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice. (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).

Exercice 3 : *(6pts)*

Un investisseur souhaite acheter un appartement dont l'objectif est de la louer. Pour cela, il s'intéresse à la rentabilité locative de cet appartement.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-4} .

PARTIE A

On considère deux types d'appartement :

— Les appartements d'une ou deux pièces notés respectivement T1 et T2 ;
— Les appartements de plus de deux pièces.

Une étude des dossiers d'appartements loués dans un secteur ont montré que :

— 35 % des appartements loués sont de type T1 ou T2 ;
— 45 % des appartements loués de type T1 ou T2 sont rentables ;
— 30 % des appartements loués, qui ne sont ni de type T1 ni de type T2, sont rentables.

On choisit un dossier au hasard et on considère les évènements suivants :

— T : « l'appartement est de type T1 ou T2 » ;
— R : « l'appartement loué est rentable » ;
— $\overline{T}$ est l'évènement contraire de T et $\overline{R}$ est l'évènement contraire de R.

1. Traduire cette situation par un arbre pondéré.

2. Montrer que la probabilité qu'un appartement loué soit rentable est égale à 0,352 5.

3. Calculer la probabilité que l'appartement soit de type T1 ou T2, sachant qu'il est rentable.

PARTIE B

On considère X la variable aléatoire égale au nombre d'appartements rentables dans un échantillon aléatoire de 100 appartements loués. On admet que toutes les conditions sont réunies pour assimiler X à une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 35$ et d'écart type $\sigma = 5$.
À l'aide de la calculatrice :

1. Calculer $P(25 \leqslant X \leqslant 35)$.

2. Calculer la probabilité qu'au plus 45 appartements parmi les 100 appartements loués soient rentables.