Devoir surveillé n°6 : Angles orientés – Trigonométrie – Dérivation

L'énoncé est à rendre avec sa copie.
L'exercice 1 est à traiter en premier et à rendre avant d'aborder la suite.
La calculatrice n'est autorisée qu'après avoir rendu l'exercice 1.
Le barème n'est qu'indicatif (le devoir est noté sur 25 points).

EXERCICE 1 (7 points).
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des cinq questions, **plusieurs** affirmations peuvent être exactes.
Cocher la ou les affirmations exactes pour chaque question, sachant que :

- chaque question rapporte au maximum 1 point et au minimum 0 point ;
- l'absence d'affirmation n'apporte ou n'enlève aucun point ;
- quand il y a plusieurs affirmations justes au sein d'une même question, chacune rapporte une partie du point attribué à la question ;
- quand plusieurs affirmations sont cochées, dont des fausses, **chaque affirmation fausse enlève 0,5 point pour la question** (avec un minimum de 0 point pour chaque question).

Aucune justification n'est demandée.

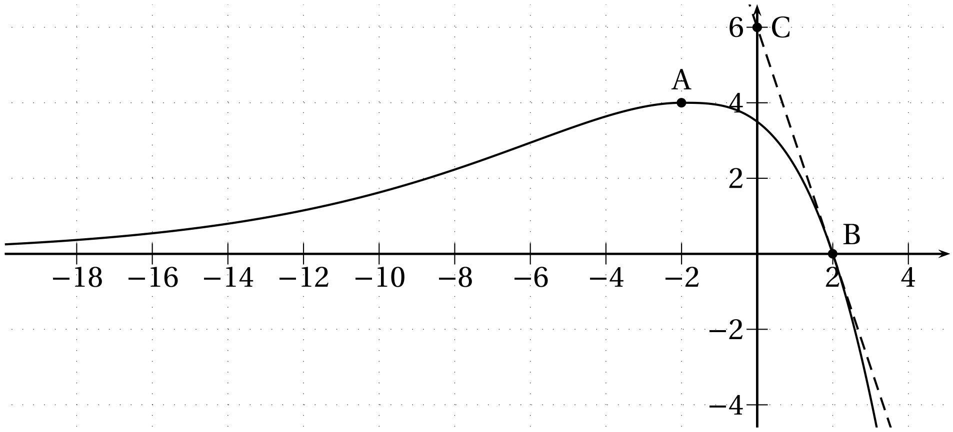
1. La mesure principale de $-\frac{127\pi}{6}$ est :
   ☐ $-\frac{\pi}{6}$ ☐ $-\frac{7\pi}{6}$ ☐ $\frac{5\pi}{6}$ ☐ $-\frac{5\pi}{6}$
2. $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ est égal à :
   ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$
3. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\pi]$ est :
   ☐ $\mathscr{S} = \left\{\frac{2\pi}{3}\,;\frac{4\pi}{3}\right\}$ ☐ $\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right\}$ ☐ $\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{3}\right\}$ ☐ $\mathscr{S} = \left\{-\frac{2\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right\}$
4. L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $\sin x = -\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$ est :
   ☐ $\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + k\times 2\pi\,;\frac{5\pi}{6} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ ☐ $\mathscr{S} = \left\{\frac{7\pi}{6} + k\times 2\pi\,;\frac{11\pi}{6} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$
   ☐ $\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\times 2\pi\,;\frac{7\pi}{6} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ ☐ $\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\times 2\pi\,;-\frac{5\pi}{6} + k\times 2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$
5. On donne $A = \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$. Alors A est égale à :
   ☐ $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ ☐ $2\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ ☐ $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$ ☐ $-\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$
6. $ABCD$ est un carré, alors $\left(\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BA}\right)$ est égal à :
   ☐ $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ ☐ $\left(\overrightarrow{DB}\,;\overrightarrow{DC}\right)$ ☐ $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\right)$ ☐ $\left(\overrightarrow{DB}\,;\overrightarrow{BA}\right)$
7. On a $\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right) = \frac{10\pi}{7} + k\times 2\pi$ et $\left(\vec{w}\,;\vec{u}\right) = \frac{11\pi}{7} + k\times 2\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, alors :
   ☐ $\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right) = -\frac{\pi}{7} + k\times 2\pi$ ☐ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires de même sens
   ☐ $\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right) = \frac{6\pi}{7} + k\times 2\pi$ ☐ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires de sens contraire

---

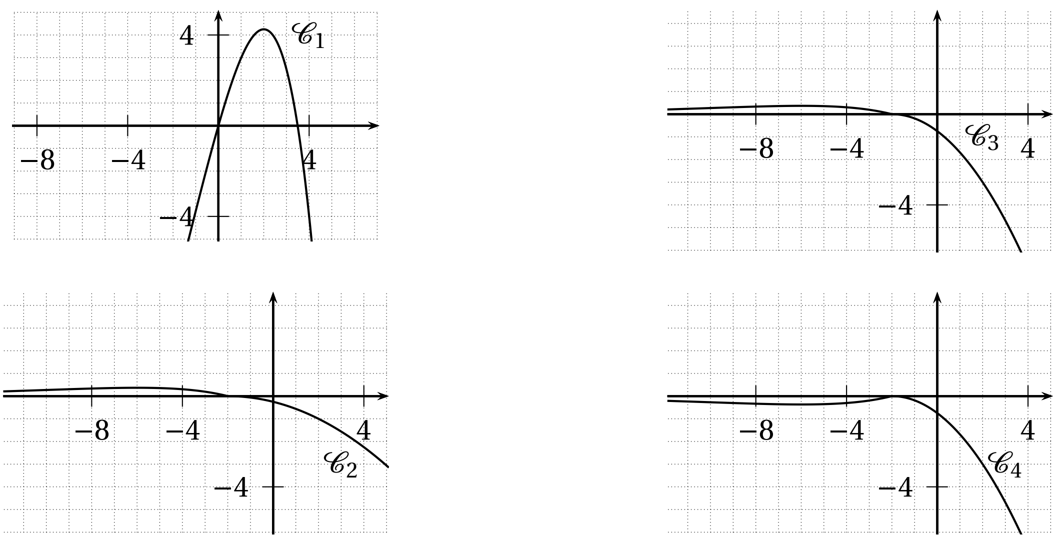
EXERCICE 2 (4 points)**.**

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi qu'une de ses tangentes. On sait que :

- le point A $(-2\,;\,4)$ est le sommet de $\mathscr{C}$;
- la tangente à $\mathscr{C}$ au point B $(2\,;\,0)$ passe par le point C $(0\,;\,6)$;
- B est le seul point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.



1. Donner, sans justifier, $f(-2)$ et $f(2)$.
2. Donner, en justifiant, $f'(-2)$ et $f'(2)$.
3. *Chacune des réponses aux questions suivantes devra être justifiée par des arguments graphiques.*
   Parmi les quatre courbes proposées ci-dessous déterminer celle qui représente :
   (a) f', la fonction dérivée de f
   (b) une fonction g telle que $g' = f$

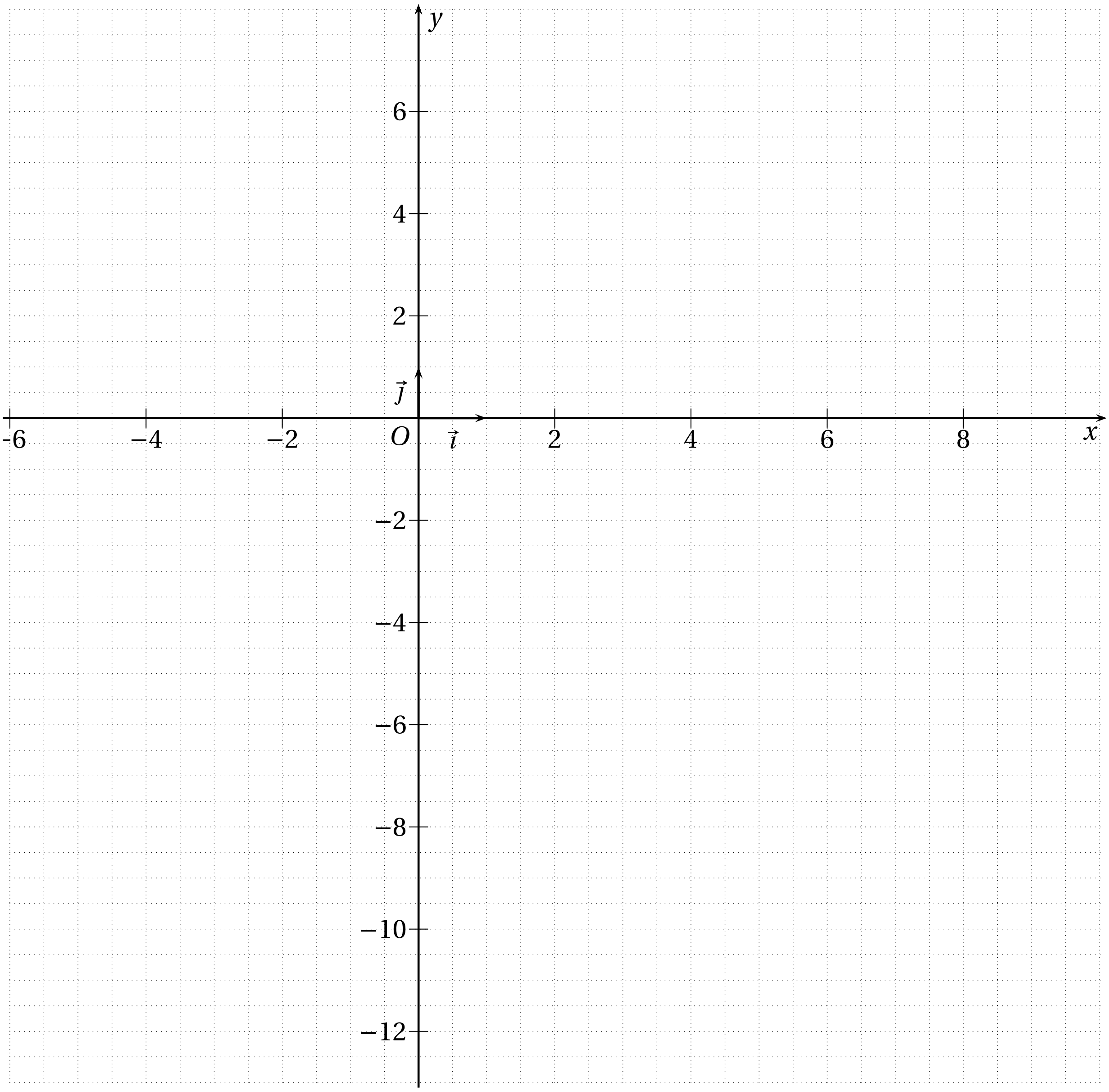


EXERCICE 3 (7 points).

f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-11x+28}{x-3}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
   (d) Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 4 et T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une équation de la droite T.
2. Dans le repère ci-dessous :
   (a) placer les points correspondant aux extremums locaux de f ainsi que A ;
   (b) tracer T et les tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}$;
   (c) tracer $\mathscr{C}$.

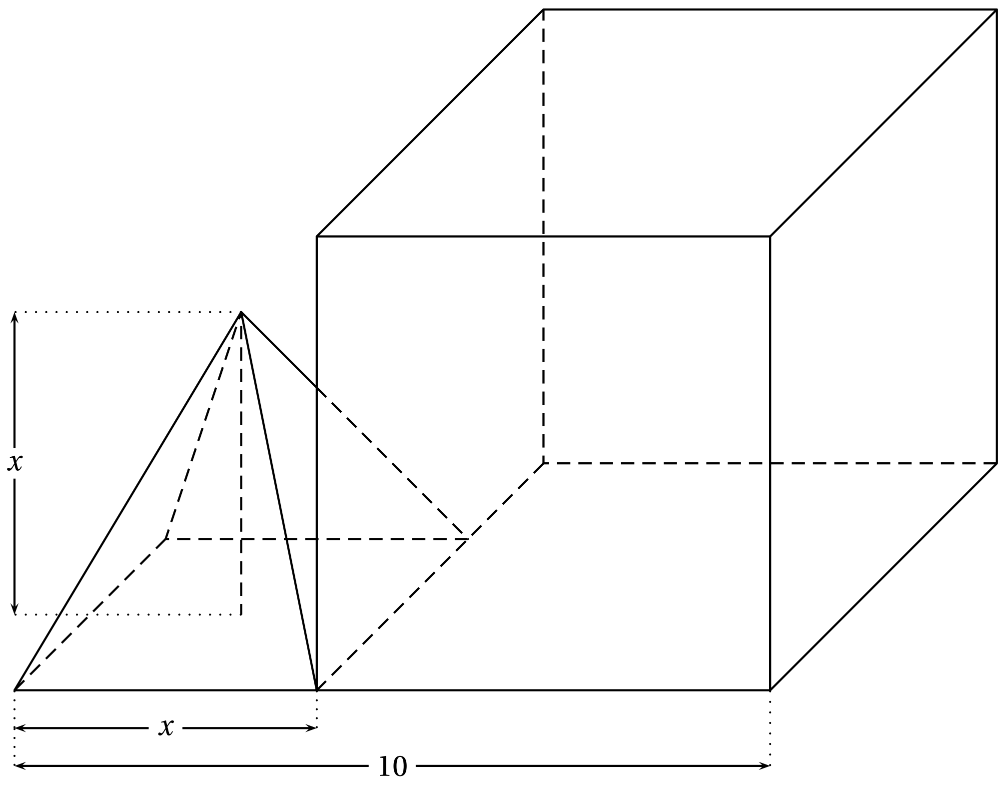


EXERCICE 4 (7 points)**.**

On rappelle que le volume d'une pyramide est le tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Au centre d'un hall d'exposition, on doit monter deux stands en toile réservés à l'accueil des visiteurs.
Le premier a la forme d'une pyramide régulière à base carrée et le second celle d'un cube ; ils sont accolés à la base par un côté et s'étalent sur une longueur totale de 10 m.

Pour des raisons esthétiques, le responsable de la décoration exige que la hauteur de la pyramide soit égale au côté de sa base et souhaite que l'aire totale occupée au sol par ces deux stands soit la plus petite possible.
Le responsable technique souhaite que le volume total de ces deux stands soit le plus petit possible pour permettre une économie d'énergie.



Ils s'adressent à l'ingénieur en chef (c'est vous) pour qu'il trouve la meilleure solution.

On note x la longueur, et donc la hauteur, en mètres de la pyramide, x étant compris entre 0 et 10.
On note $\mathscr{A}$ la fonction qui à x associe l'aire totale occupée au sol par les deux stands et $\mathscr{V}$ la fonction qui à x associe leur volume total, ces deux fonctions étant définies sur $[0\,;\,10]$.

1. (a) Calculer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x.

   (b) Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$, dresser son tableau de variation et préciser son minimum sur $[0\,;\,10]$.

2. (a) Montrer que $\mathscr{V}(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 30x^2 - 300x + 1\,000$.

   (b) Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{V}$, dresser son tableau de variation et préciser son minimum sur $[0\,;\,10]$.
   En donner une valeur approchée arrondie à l'unité.

3. Vous êtes l'ingénieur : quelle valeur entière de x choisiriez-vous ? Expliquer votre choix.