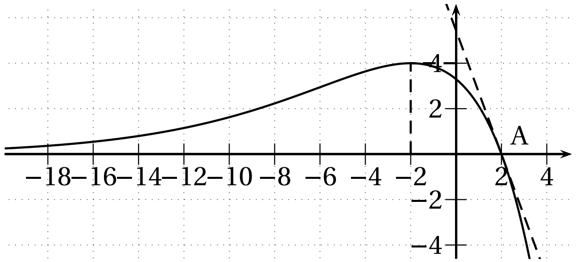
Un corrigé du baccalauréat blanc

EXERCICE 1 (5 points).
Commun à tous les candidats

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2.



1. Quelle est l'équation de la tangente à C_f en A ?

   (a) $y = -\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}$ (c) $y = \mathrm{e}x + 3\mathrm{e}$

   (b) $y = 3x + 2\mathrm{e}$ (d) $y = -5x + 4\mathrm{e}$

   Parmi les trois équations de droites proposées, une seule correspond à une droite passant par le point $(2\,;0)$. En effet, pour $x = 2$, la proposition (a) donne $y = -\mathrm{e} \times 2 + 2\mathrm{e} = 0$ tandis que les autres propositions donnent, respectivement, $y = 6 + 2\mathrm{e} \neq 0$, $y = 5\mathrm{e} \neq 0$ et $y = -10 + 4\mathrm{e} \neq 0$.
   Ce ne peut donc être que la proposition (a).

2. La fonction f est :

   (a) concave sur $]-\infty\,;\,0]$ (c) concave sur $[0\,;2]$

   (b) convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ (d) convexe sur $[0\,;2]$

   Par lecture graphique, la fonction est convexe sur $]-\infty; -6]$ et concave sur $[-6; +\infty[$.
   Le seule proposition correcte est donc la (c).

3. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente f' la fonction dérivée de la fonction f ?

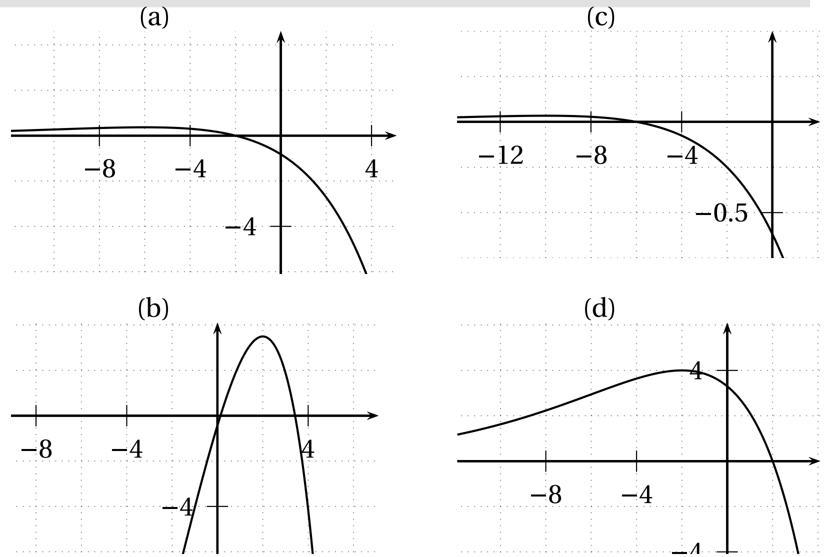
   Comme f est croissante sur $]-\infty; -2]$ et décroissante sur $[-2; +\infty[$, sa fonction dérivée f' est positive sur $]-\infty; -2]$ et négative sur $[-2; +\infty[$.
   Ce ne peut donc être que la proposition (a).

4. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente f'' la dérivée seconde de la fonction f ?

   Comme d'après la courbe, la fonction est convexe sur $]-\infty; -6]$ et concave sur $[-6; +\infty[$, sa dérivée seconde f'' est positive sur $]-\infty; -6]$ et négative sur $[-6; +\infty[$.
   Ce ne peut donc être que la proposition (c).

5. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente une fonction F telle que $F' = f$?

   Le signe de $F' = f$ donne les variations de F, or, par lecture graphique, $F' = f$ est positive sur $]-\infty; 2]$ et négative sur $[2; +\infty[$ donc F est croissante sur $]-\infty; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$.
   Ce ne peut donc être que la proposition (b).



EXERCICE 2 (5 points).

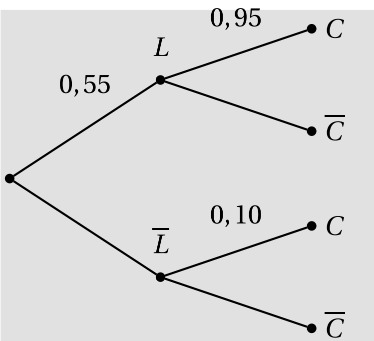
Pour les candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et pour les candidats de la série L

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

- L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
- C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Les calculs devront être justifiés par des formules.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.



0,5 point

2. Calculer $P(L \cap C)$ la probabilité de l'évènement $L \cap C$.

$P(L \cap C) = P(L) \times P_L(C) = 0,55 \times 0,95 = 0,5225$ *0,75 point*

3. Montrer que $P(C) = 0,5675$.

L et $\overline{L}$ réalisant, par définition, une partition de l'univers, on a, d'après la formule des probabilités conditionnelles totales : *1 point*

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap L) + P\left(C \cap \overline{L}\right) \\ &= 0,5225 + P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(C) \\ &= 0,5225 + (1-0,55) \times 0,10 \\ &= 0,5225 + 0,045 \\ &= 0,5675 \end{aligned}$$

4. Calculer $P_C(L)$, la probabilité de l'évènement L sachant l'évènement C réalisé. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

$P_C(L) = \frac{P(C \cap L}{P(C)} = \frac{0,5225}{0,5675} \approx 0,9207$ *0,75 point*

5. On interroge douze élèves au hasard parmi les élèves de l'établissement. Le nombre d'élèves dans l'établissement est suffisamment grand pour que le choix des élèves soit assimilé à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi binomiale.

   Pour chaque élève il n'y a que deux issues possibles : C (succès) ou $\overline{C}$ (épreuve de BERNOULLI)
   Le tirage est assimilé à un tirage avec remise donc les tirages sont identiques et indépendants (schéma de BERNOULLI).
   X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.
   X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,5675$.
   0,75 point

   (b) Calculer la probabilité qu'exactement les trois quarts des élèves interrogés soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

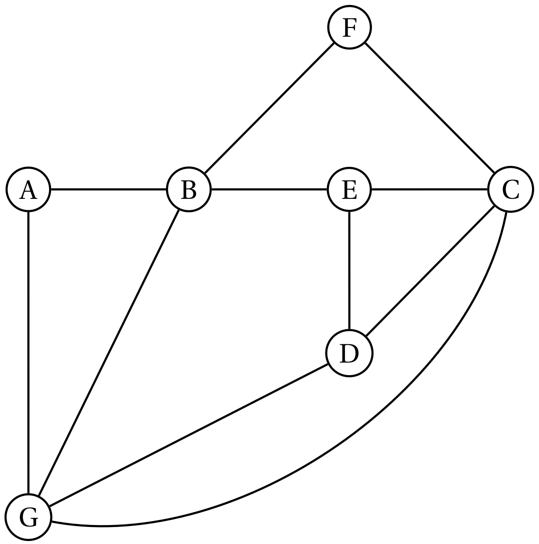
   $p(X = 9) = \binom{12}{9} \times 0,5675^9 \times (1-0,5675)^3 \approx 0,1087$ *0,5 point*

(c) Calculer la probabilité qu'au moins un tiers des élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

$p(X \geqslant 4) = 1 - p(X < 4) = 1 - p(X \leqslant 3) \approx 0{,}9731$ *0,75 point*

Exercice 2 (5 points).
Pour les candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un groupe d'amis part en randonnée en Corse et désire passer plusieurs jours à découvrir 7 lacs de montagne.
Pour optimiser leur trajet, ils décident de préparer leur randonnée en se servant d'un graphe.
Ils nomment A, B, C, D, E, F et G les 7 lacs qu'ils représentent par des sommets, les arêtes du graphe représentent les sentiers possibles pour rejoindre deux lacs.
Voici leur graphe :



Sauf si cela est précisé, on ne demande pas de justification.

Partie A.

1. Ce graphe est-il complet ? Justifier et interpréter votre réponse en termes de randonnée.

Ce graphe n'est pas complet car tous les sommets ne sont pas adjacents (B et D, par exemple).
Cela signifie qu'il n'y a pas toujours de sentier entre deux lacs. *0,5 point*

2. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.

La chaîne AGBEDCG, par exemple, passant par tous les sommets, cela signifie qu'il existe toujours pour deux sommets quelconques une chaîne dont ces deux sommets sont les extrêmités. Donc ce graphe est connexe. *0,5 point*

3. Donner l'ordre du graphe et déterminer le degré de chacun de ses sommets.

Le graphe est d'ordre 7.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	4	3	3	2	4

0,5 point

4. Déterminer le nombre d'arêtes du graphe en justifiant à l'aide de la question précédente.

La somme des degrés des sommets est le double du nombre d'arêtes, donc ce nombre vaut $\frac{2+4+4+3+3+2+4}{2} = \frac{22}{2} = 11$. *0,5 point*

5. Déterminer la matrice d'adjacence M de ce graphe.

En prenant les sommets dans l'ordre alphabétique : *0,5 point*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie B.

1. Les amis peuvent-ils parcourir tous les sentiers sans repasser deux fois par le même sentier ? Si oui, donner un exemple de randonnée possible ; si non, justifier.

   C'est possible. Par exemple : ECDEBFCGABGD. *0,5 point*

2. L'un des amis insiste pour parcourir tous les sentiers sans repasser deux fois par le même, tout en faisant ce qu'il appelle une boucle, c'est-à-dire en revenant au point de départ.

   (a) Justifier que cela n'est pas possible.

   Les sentiers étant les arêtes du graphe, cela revient à chercher si le graphe contient un cycle eulérien.
   Pour cela, d'après le théorème d'EULER, il faut qu'il soit connexe et qu'il ne comporte que des sommets pairs, or, s'il est bien connexe, deux sommets sont impairs donc il ne contient pas de cycle eulérien.
   Une telle boucle est donc impossible. *1 point*

   (b) Proposer une modification du graphe pour que cela le soit en justifiant.

   Pour que tous les sommets soient pairs, il suffit de supprimer l'arête entre les sommets E et D qui deviendraient de degré 2. *0,25 point*

   (c) Interpréter votre modification en termes de randonnée.

   Cela revient à ne pas tenir compte du sentier entre les lacs E et D dans leur projet de randonnée. *0,25 point*

Partie C.

Certains amis ont peur de ne pas tenir le rythme, aussi décident-ils de se concentrer sur le lac A et le lac D et de se limiter à des randonnées de 4 étapes, c'est-à-dire comportant exactement 4 sentiers.
Combien y a-t-il de randonnées de 4 étapes conduisant du lac A au lac D ? Justifier.

M^4 indique le nombre de chaînes de longueur quatre entre tous les sommets du graphe.
Le coefficient de M^4 de la ligne 1 colonne 4 (ou colonne 1 ligne 4) est 12.
Il y a donc 12 chaînes de longueur 4 entre les sommets A et D, soit 12 randonnées de 4 étapes conduisant du lac A au lac D. *0,5 point*

EXERCICE 3 (5 points).
Commun à tous les candidats

Le responsable du foyer des jeunes d'un village a décidé d'organiser une brocante annuelle. Pour la première brocante, en 2012, il a recueilli 110 inscriptions.
D'après les renseignements pris auprès d'autres organisateurs dans les villages voisins, il estime que d'une année sur l'autre, 90 % des exposants se réinscriront et que 30 nouvelles demandes seront déposées.
On désigne par u_n le nombre d'exposants en $(2012+n)$ avec n un entier naturel.
Ainsi u_0 est le nombre d'exposants en 2012, soit $u_0 = 110$.

1. Quel est le nombre d'exposants attendu pour 2013 ?

   $u_1 = 0,90 \times u_0 + 30 = 129$. 129 exposants sont donc attendus pour 2013. *0,25 point*

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 30$.

u_{n+1} est la somme des exposants de l'année précédante se réinscrivant, soit $0,9 \times u_n$, et des 30 nouvelles demandes. *0,5 point*

3. Vu la configuration actuelle de la manifestation dans le village, le nombre d'exposants ne peut pas excéder 220.

   (a) **Recopier** et compléter l'algorithme proposé ci-dessous afin qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle l'organisateur ne pourra pas accepter toutes les demandes d'inscription.

Initialisation :	Affecter à u la valeur 110
	Affecter à a la valeur 2012
Traitement :	Tant que $u \leqslant 220$
	Affecter à u la valeur $0,9 \times u + 30$
	Affecter à a la valeur $a + 1$
Sortie :	Afficher a

0,75 point

   (b) Indiquer la valeur qu'affiche l'algorithme.

L'algorithme affiche la valeur 2021. *0,5 point*

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 300$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} - 300 \\ & = & 0,9 \times u_n + 30 - 300 \\ & = & 0,9 \times u_n - 270 \\ & = & 0,9\left(u_n - \frac{270}{0,9}\right) \\ & = & 0,9(u_n - 300) \\ & = & 0,9v_n \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rl} = & 0,9 \times u_n - 270 \\ = & 0,9 \times (v_n + 300) - 270 \\ = & 0,9v_n + 270 - 270 \\ = & 0,9v_n \end{array}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,9. *1 point*

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = -190 \times 0,9^n + 300$.

(v_n) étant géométrique $v_n = v_0 \times q^n = -190 \times 0,9^n$.
Or $v_n = u_n - 300 \Leftrightarrow u_n = v_n + 300 = -190 \times 0,9^n + 300$. *0,5 point*

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Retrouver le résultat que renvoie l'algorithme de la question 3a en utilisant la formule de la question 4b.

Plusieurs méthodes sont envisageables. En voici quelques unes.
0,75 point

En utilisant un autre algorithme.
L'algorithme suivant utilise la formule de la question 3a :

Initialisation :	Affecter à u la valeur 110
	Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $u \leqslant 220$
	Affecter à n la valeur $n + 1$
	Affecter à u la valeur $-190 \times 0,9^n + 300$
	Fin du Tant que
	Affecter à a la valeur $2012 + n$
Sortie :	Afficher a

Cet algorithme affiche lui aussi 2021.

En étudiant la suite u_n.
La calculatrice indique que $u_8 \approx 218$ et $u_9 \approx 226$.
Comme $0 < 0,9 < 1$, on a :

$$\begin{array}{rrcl} & 0,9^n & > & 0,9^{n+1} \\ \Leftrightarrow & -190 \times 0,9^n & < & -190 \times 0,9^{n+1} \\ \Leftrightarrow & -190 \times 0,9^n + 300 & < & -190 \times 0,9^{n+1} + 300 \\ \Leftrightarrow & u_n & < & u_{n+1} \end{array}$$

On a donc $u_8 < 220 < u_9$ et une suite (u_n) strictement croissante. C'est donc à partir du rang $n = 9$, soit à partir de $2012 + 9 = 2021$ que le nombre d'exposants excèdera 220.

Par le calcul.

$$\begin{array}{rccl} & -190\times 0,9^n+300 & > & 220\\ \Leftrightarrow & -190\times 0,9^n & > & -80\\ \Leftrightarrow & 0,9^n & < & \frac{-80}{-190}=\frac{8}{19}\\ \Leftrightarrow & \ln\left(0,9^n\right) & < & \ln\left(\frac{8}{19}\right)\\ \Leftrightarrow & n\ln 0,9 & < & \ln\left(\frac{8}{19}\right)\\ \Leftrightarrow & n & > & \frac{\ln\left(\frac{8}{19}\right)}{\ln 0,9} \text{ car } \ln 0,9<0 \end{array}$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{8}{19}\right)}{\ln 0,9} \approx 8,2$, c'est donc à partir du nombre entier $n = 9$, soit à partir de $2012+9 = 2021$ que le nombre d'exposant excèdera 220.

6. L'organisateur décide d'effectuer une démarche auprès de la mairie pour obtenir assez de place pour ne jamais refuser d'inscriptions. Il affirme au maire qu'il suffit de lui autoriser 300 emplacements. A-t-il raison de proposer ce nombre ? Pourquoi ?

Là aussi plusieurs méthodes possibles. En voici quelques unes.

0,75 point

En étudiant la suite (u_n).
Comme $0<0,9<1$, $\lim 0,9^n = 0$ donc $\lim u_n = -190\times 0+300 = 300$.
De plus : Comme $0<0,9<1$, on a :

$$\begin{array}{rccl} & 0,9^n & > & 0,9^{n+1}\\ \Leftrightarrow & -190\times 0,9^n & < & -190\times 0,9^{n+1}\\ \Leftrightarrow & -190\times 0,9^n+300 & < & -190\times 0,9^{n+1}+300\\ \Leftrightarrow & u_n & < & u_{n+1} \end{array}$$

(u_n) est donc strictement croissante et tend vers 300 : u_n sera donc toujours strictement inférieur à 300.
L'organisateur a donc raison.

Par le calcul.

$$\begin{array}{rccl} & -190\times 0,9^n+300 & > & 300\\ \Leftrightarrow & -190\times 0,9^n & > & 0 \end{array}$$

Or, -190 étant strictement négatif et $0,9^n$ strictement positif, le produit des deux ne pourra pas être strictement supérieur à 0.
Cette inéquation n'a donc pas de solution, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de n tel que le nombre d'exposants u_n sera strictement supérieur à 300.
L'organisateur a donc raison.

Exercice 4 (5 points).
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^{-x}+2$.

Partie A.

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.

   (a) Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4]$, $f'(x) = (7-3x)\mathrm{e}^{-x}$.

   f est de la forme $u\times v+w$ où $u(x) = 3x-4$, $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $w(x) = 2$.
   Et $u'(x) = 3$, $v'(x) = (-1)\mathrm{e}^{-x}$ et $w'(x) = 0$. *0,5 point*

   $$\begin{array}{rccl} \text{Or} & f' & = & u'\times v+u\times v'+w'\\ \text{Donc} & f'(x) & = & 3\times \mathrm{e}^{-x}+(3x-4)\times(-1)\mathrm{e}^{-x}+0\\ & & = & [3+(3x-4)(-1)]\mathrm{e}^{-x}\\ & & = & (3-3x+4)\mathrm{e}^{-x}\\ & & = & (7-3x)\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

   (b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
   Toutes les valeurs du tableau seront données à 10^{-2}.

Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ sera du signe de $(7-3x)$ d'où : *1,25 point*

x	0		$\frac{7}{3}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-2	$\nearrow$	$2,29$	$\searrow$	$2,15$

2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;4]$.

- Sur $\left[\frac{7}{3}\,;4\right]$, d'après le tableau des variations de f, le minimum de $f(x)$ est $f(4) > 0$ donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\left[\frac{7}{3}\,;4\right]$.
- Sur $\left[0\,;\frac{7}{3}\right]$, comme :
  - f est continue,
  - f est strictement croissante,
  - $f(0) < 0 < f\left(\frac{7}{3}\right)$

  alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[0\,;\frac{7}{3}\right]$.
- Donc, sur $[0\,;4]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. *0,75 point*

(b) Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.

D'après la calculatrice :

x	0,36	α	0,37
$f(x)$	$-0,0372$	0	0,0037

Donc $\alpha \approx 0,36$ ou $\alpha \approx 0,37$ sont des valeurs approchées de α à 0,01 près. *0,75 point*

Vous traiterez, au choix, la partie B ou la partie C.

Partie B.

1. Déduire de la partie A le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x sur l'intervalle $[0\,;4]$.

D'après le tableau des variations, on a : *0,5 point*

x	0		α		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par $F(x) = (1-3x)e^{-x} + 2x$.

(a) Montrer que F a pour dérivée f sur $[0\,;4]$.

F est de la forme $u \times v + w$ où $u(x) = 1-3x$, $v(x) = e^{-x}$ et $w(x) = 2x$.
Et $u'(x) = -3$, $v'(x) = (-1)e^{-x}$ et $w'(x) = 2$. *0,5 point*

$$\begin{array}{llcl}
\text{Or} & F' & = & u' \times v + u \times v' + w' \\
\text{Donc} & F'(x) & = & -3 \times e^{-x} + (1-3x) \times (-1)e^{-x} + 2 \\
 & & = & [-3 + (1-3x)(-1)]e^{-x} + 2 \\
 & & = & (-3-1+3x)e^{-x} + 2 \\
 & & = & (3x-4)e^{-x} + 2 \\
 & & = & f(x)
\end{array}$$

(b) En déduire les variations de F sur $[0\,;4]$.

Le signe de $F'(x) = f(x)$ nous donne les variations de F :

- F est décroissante sur $[0\,;\alpha]$
- F est croissante sur $[\alpha\,;4]$

0,75 point

Partie C.

On désigne par f'' la dérivée seconde de la fonction f.

1. Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;4]$, $f''(x) = (3x-10)\mathrm{e}^{-x}$.

f' est de la forme $u \times v$ où $u(x) = 7-3x$, et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Et $u'(x) = -3$ et $v'(x) = (-1)\mathrm{e}^{-x}$. *0,5 point*

$$\begin{array}{lrcl} \text{Or} & f'' & = & u' \times v + u \times v' \\ \text{Donc} & f''(x) & = & -3 \times \mathrm{e}^{-x} + (7-3x) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} \\ & & = & [-3+(7-3x)(-1)]\mathrm{e}^{-x} \\ & & = & (-3-7+3x)\mathrm{e}^{-x} \\ & & = & (3x-10)\mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

2. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

$\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ sera du signe de $3x-10$. D'où :

x	0		$\frac{10}{3}$		4
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	
f		concave		convexe	

f est donc convexe sur $\left[\frac{10}{3}\,;4\right]$. *0,75 point*

3. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Comme $f''(x)$ s'annule et change de signe en $\frac{10}{3}$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f possède un point d'inflexion d'abscisse $\frac{10}{3}$. *0,5 point*