Devoir surveillé nº 5

Exponentielle

Le devoir est noté sur 20. Le barème est provisoire.

EXERCICE 5.1 (8 points).
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.
Cocher l'affirmation exacte pour chaque question, sachant qu'une affirmation exacte rapporte 1 point, l'absence d'affirmation, les affirmations multiples ou une affirmation fausse n'apportent ou n'enlèvent aucun point. *Aucune justification n'est demandée.*

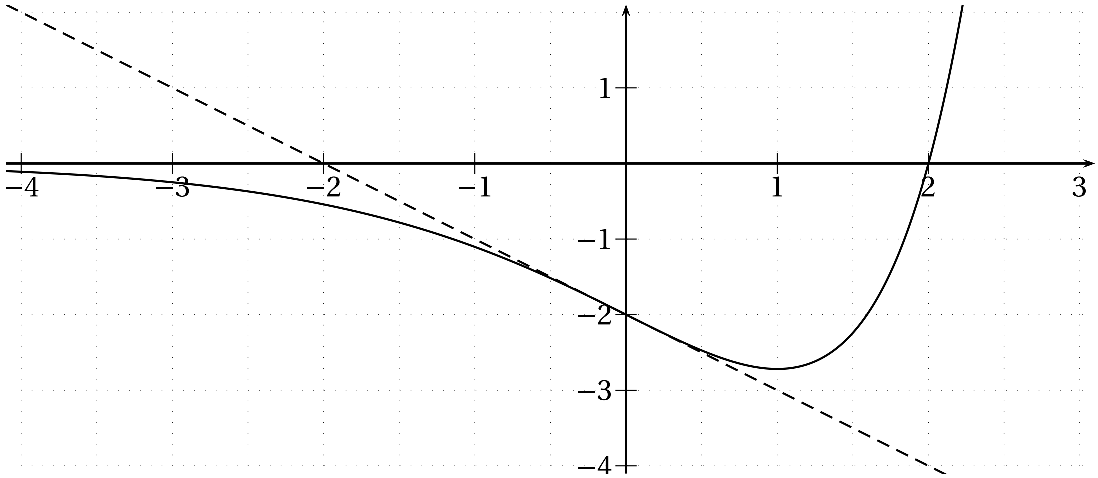
1. Parmi les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, la seule convexe est :
   ☐ $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ ☐ $f(x) = 3x^2 + x - 7$ ☐ $f(x) = -\mathrm{e}^x$
2. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(1 - x^2)$ alors $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est égale à :
   ☐ $\frac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^4}$ ☐ 2,117 ☐ $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}$
3. Si f est définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, alors, sur $\mathbb{R}$:
   ☐ $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ ☐ f n'est pas monotone ☐ f est décroissante
4. $\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{2x}$ est égal à :
   ☐ e^x ☐ $\mathrm{e}^{\frac{3x}{2x}}$ ☐ $\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)$
5. $\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - 1$ est égal à :
   ☐ $-\frac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ ☐ $\frac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ ☐ 0
6. L'inéquation $\mathrm{e}^{1+x} \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}$ a pour solution :
   ☐ $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ ☐ $\left[-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ ☐ $\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right]$
7. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}4^x$, alors :
   ☐ f est décroissante sur $\mathbb{R}$ ☐ $f(0) = 1{,}4$ ☐ $f(1) \times f(-4) = f(-3)$
8. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$, alors :
   ☐ $f'(x) = \mathrm{e}^{1-x}$ ☐ $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{1-x}$ ☐ $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{1-x}$

EXERCICE 5.2 (3 points).
Les questions sont indépendantes.
Sauf indication contraire, on donnera la valeur exacte de la réponse puis une valeur approchée à 10^{-2}.

1. Un capital est placé à intérêts composés à un taux annuel de 3 % pendant 9 ans. À quel taux annuel faut-il le placer pour qu'il rapporte la même somme au bout de 4 ans et demi ?
2. (a) La fonction qui à x associe $600 \times 0{,}58^x$ modélise le nombre de pucerons sur des pieds de rosier après x jours de traitement. On décide d'interrompre le traitement lorsqu'il y a moins de 20 pucerons sur les rosiers. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée du traitement en jours entiers.
   (b) On applique un autre traitement que le précédent. Il y avait 900 pucerons sur les pieds de rosiers et au bout de 15 jours il n'en reste plus que 70. Déterminer le taux moyen journalier d'évolution.

EXERCICE 5.3 (9 points).
Les parties B et C sont liées mais peuvent être traitées indépendamment de la partie A.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative est donnée ci-dessous ainsi que la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



Partie A.

1. Par lecture graphique donner, sans justification, $f(0)$ et $f'(0)$.
2. On sait que $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$ où a et b sont deux réels fixés.
   (a) Montrer que $f'(x) = (ax+a+b)\mathrm{e}^x$.
   (b) Utiliser les valeurs $f(0)$ et $f'(0)$ trouvées à la question 1 pour trouver les valeurs de a et de b.

Partie B.
On suppose pour la suite que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$.

1. Établir le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. (a) Prouver que, pour tout réel, $f'(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Établir le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0.
4. (a) Prouver que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in [1\,;+\infty[$.
   (b) Donner l'arrondi de α à 0,1 près.

Partie C.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-3)\mathrm{e}^x$.

1. Prouver que, pour tout réel, $g'(x) = f(x)$.
2. Déduire de la partie B les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Déduire de la partie B la convexité de g sur $\mathbb{R}$.