

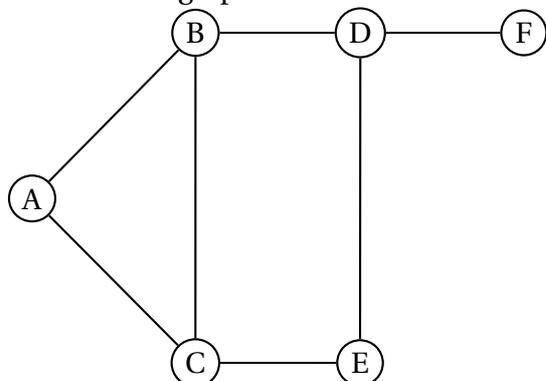
Devoir surveillé n° 2

Graphes eulériens

L'énoncé est recto verso.

EXERCICE 2.1 (6,5 points).

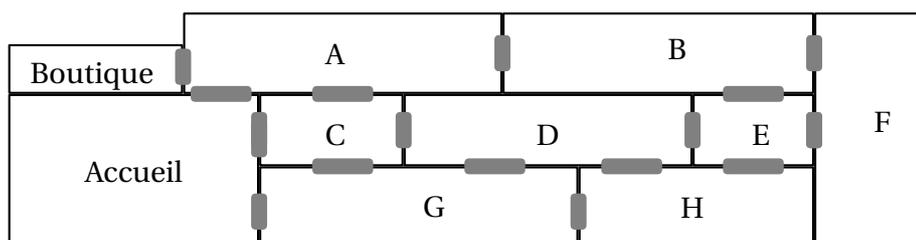
On donne le graphe suivant :



1. Citer deux sommets adjacents. *Justifier brièvement.*
2. Donner l'ordre du graphe. *Justifier brièvement.*
3. Le graphe est-il connexe ? *Justifier brièvement.*
4. Le graphe est-il complet ? *Justifier brièvement.*
5. Le graphe contient-il un sous-graphe complet d'ordre 3 ? d'ordre 4 ? *Si oui donner les sommets par lesquels il est engendré.*
6. Le graphe contient-il un sous-graphe stable d'ordre 3 ? *Si oui donner les sommets par lesquels il est engendré.*

EXERCICE 2.2 (5 points).

Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.

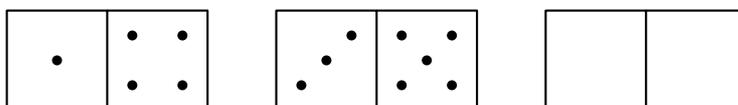


1. Est-il possible de trouver un trajet où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ? *On justifiera très rigoureusement.*
2. Si oui, donner un tel trajet ; si non proposer une modification simple du musée permettant un tel trajet en justifiant soigneusement pourquoi cette modification permet un tel trajet.

EXERCICE 2.3 (8,5 points).

Un domino est une pièce rectangulaire comportant deux parties carrées, chacune avec un nombre de points.

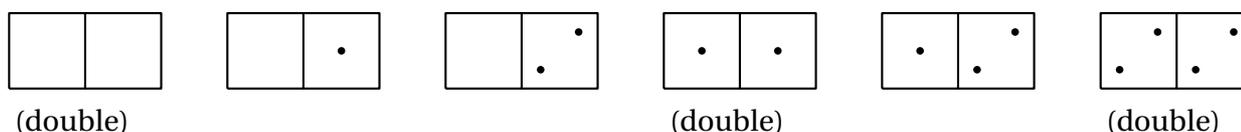
Des exemples sont donnés ci-dessous.



On appelle J_n le jeu de domino composé de pièces, toutes distinctes, comportant toutes les combinaisons possibles de nombres de points de 0 à n .

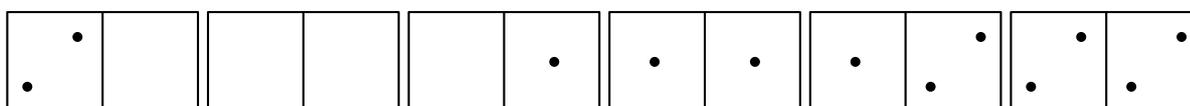
On appelle un *double* une pièce ayant le même nombre de points sur chaque carré.

Par exemple, J_2 comporte les pièces suivantes :



Jouer avec un tel jeu, dans le cadre de cet exercice, revient à essayer d'aligner les dominos, un domino ne pouvant se poser qu'à côté d'un autre domino comportant une partie libre avec le même nombre de points.

Par exemple, avec J_2 , une partie finie peut ressembler à ça :



Selon la valeur de n , il n'est pas toujours possible de finir la partie, c'est-à-dire d'aligner tous les dominos.

1. Justifier qu'on peut toujours placer un *double* dans un tel alignement.
Pour la suite on ne considérera que les pièces n'étant pas des doubles.
2. (a) Représenter un graphe correspondant à J_2 dont les sommets sont les différents nombres de points possibles sur chaque carré (0, 1 et 2) et les arêtes les dominos ayant ces nombres de points.
 (b) Les pièces doubles exceptées, à quoi correspond sur le graphe l'alignement proposé en exemple ci-dessus?
 (c) Plus généralement à quoi correspond sur le graphe la recherche d'un alignement ?
3. Montrer qu'avec J_3 , jeu de dominos où le nombre de points peut aller jusqu'à 3 dans un carré, il n'est pas possible de finir la partie.
4. Déterminer quelle condition doit vérifier n pour qu'on puisse finir la partie avec le jeu J_n . *On justifiera soigneusement.*