
EXERCICE 4.

Pour les candidats de la série S ayant suivi l'enseignement de spécialité : Mathématiques

Les candidats rédigeront cet exercice sur une feuille indépendante.

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers, dans cette population au bout du n -ième jour.

Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.

En d'autres termes, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n).$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $V_{n+1} = AV_n$.

On admet alors que, pour tout entier naturel n , $V_n = A^n V_0$.

(b) On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que la matrice P est inversible puis, à l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1} .

(c) Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$. En déduire que $A = PDP^{-1}$.

(d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

(e) Pour tout entier naturel n , on admet que $D^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 6 - 0,9^n$.

3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10^e jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

4. Calculer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte.
