Chapitre 7

Fonction logarithme népérien

Sommaire

7.1 Vers une nouvelle fonction

7.1.1 Tableau de valeurs

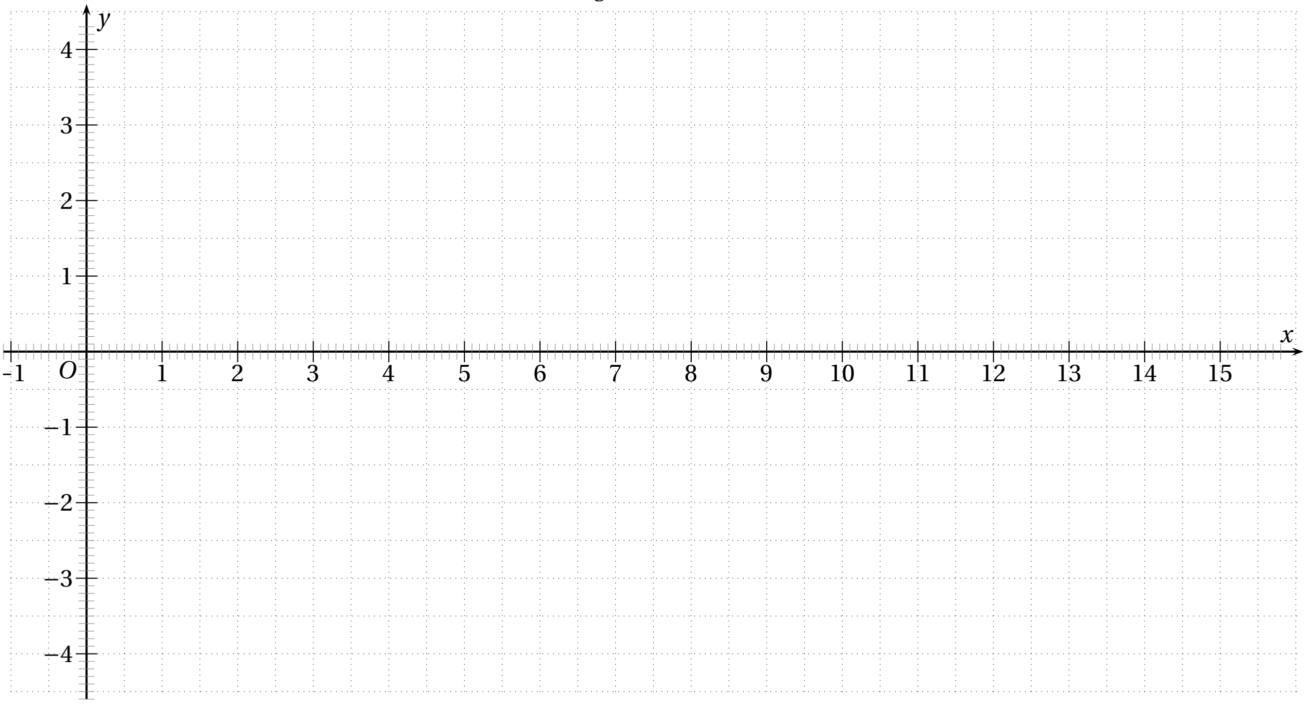
Compléter le tableau de valeurs de la fonction logarithme népérien suivant (*ln* en abrégé) en utilisant la touche $\boxed{\ln}$ de votre calculatrice. Vous donnerez les valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	-2	0	0,1	0,2	0,3	0,5	1	2	2,7	3	4	5	10	15
$\ln x$														

7.1.2 Courbe représentative

Dans le repère de la figure 7.1, placer les points de coordonnées $(x; \ln x)$ obtenus avec le tableau de valeurs et représenter graphiquement la fonction $\ln : x \longmapsto \ln x$.

FIG. 7.1 – Figure de la section 7.1.2



Lire graphiquement la valeur de x pour laquelle $\ln x = 1$. On note e cette valeur.

$$\boxed{\mathrm{e} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Avec la calculatrice, compléter les tableaux de valeurs :

x	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\ln x$					

x	2,70	2,71	2,72	2,73	2,74
$\ln x$					

En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la valeur e de x pour laquelle $\ln x = 1$.

$$\boxed{\ln e = 1 \quad \text{avec} \quad \ldots\ldots\ldots \leqslant \mathrm{e} \leqslant \ldots\ldots\ldots}$$

7.1.3 Ensemble de définition

La fonction logarithme népérien ln est une nouvelle fonction définie sur l'intervalle …………

7.1.4 Signe

On remarque que
- $\ln 1 = \ldots\ldots\ldots$
- sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, $\ln x$ ………
- sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, $\ln x$ ………

D'où le tableau de signes de la fonction ln :

x	
$\ln x$	

7.1.5 Sens de variation

Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction ln est ……………………
D'où le tableau de variation de la fonction ln :

x	
$\ln x$	

7.2 Relations algébriques

À l'aide de la calculatrice, compléter les tableaux suivants en donnant les valeurs approchées à 10^{-2} près :

7.2.1 Logarithme d'un produit

a	b	$\ln a$	$\ln b$	$\ln a + \ln b$	$a \times b$	$\ln(a \times b)$
2	3					
4	5					
0,2	15					

Propriété 7.1. *Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :*

$$\ln(a \times b) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7.2.2 Logarithme d'un inverse

b	$\ln b$	$\frac{1}{b}$	$\ln\left(\frac{1}{b}\right)$
2			
4			
0,2			

Propriété 7.2. *Pour tout nombre réel b strictement positif, on a :*

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7.2.3 Logarithme d'un quotient

a	b	$\ln a$	$\ln b$	$\ln a - \ln b$	$\frac{a}{b}$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)$
2	3					
4	5					
0,2	15					

Propriété 7.3. *Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :*

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7.2.4 Logarithme d'une puissance

a	n	$\ln a$	$n\ln a$	a^n	$\ln\left(a^n\right)$
2	3				
4	-2				
0,2	2				

Propriété 7.4. *Pour tout nombre réel a strictement positif et tout nombre entier relatif n, on a :*

$$\ln\left(a^n\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. $\ln\left(\mathrm{e}^n\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7.2.5 logarithme d'une racine carrée

a	$\frac{1}{2}\ln a$	$\sqrt{a}$	$\ln(\sqrt{a})$
2	3		
4	5		
0,2	15		

Propriété 7.5. *Pour tout nombre réel a strictement positif, on a :*

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

EXERCICE 7.1.
1. Simplifier le nombre $A = 2\ln(\mathrm{e}^2) - 3\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) + \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$.
2. Calculer en fonction de $\ln(3)$ le nombre $B = \ln\left(\sqrt{3}\right) - \ln(81) + \ln(3\mathrm{e})$.

7.3 Équations et inéquations

On déduit du sens de variation de la fonction ln, les équivalences suivantes :

Propriété 7.6. *Pour tous nombres a et b strictement positifs, on a :*
- $\ln a = \ln b$ *si et seulement si* ....
- $\ln a \leqslant \ln b$ *si et seulement si* ....
- $\ln a > \ln b$ *si et seulement si* ....

EXERCICE 7.2.
Résoudre sur l'intervalle $I =]0\,;\,+\infty[$, les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln x = 2$
2. $\frac{1}{2}\ln x \geqslant \ln 4$
3. $\ln(3x) < \ln 4$

EXERCICE 7.3 (Exercice corrigé)**.**
Un capital de 10 000 € est placé à intérêts composés à un taux de 2,5 % par an.
En combien d'années doublera-t-il ?

Notons $C(x)$ la valeur atteinte par le capital au bout de x années.
On a $C(x) = 10000\left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^x$.
On cherche x tel que $C(x) = 2 \times 10000 = 20000$. Or :

$$\begin{aligned} C(x) = 20000 &\Leftrightarrow 10000\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^x = 20000 \\ &\Leftrightarrow \left(1+\frac{2,5}{100}\right)^x = \frac{20000}{10000} = 2 \\ &\Leftrightarrow 1,025^x = 2 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(1,025^x\right) = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow x \ln 1,025 = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1,025} \\ &\Leftrightarrow x \approx 28,1 \end{aligned}$$

Il faudra donc environ 28,1 ans pour que ce capital double.

EXERCICE 7.4 (Exercice corrigé)**.**
Une voiture est achetée, neuve, 12 000 €. On estime que, sur le marché de l'occasion, elle perd 20 % de sa valeur par an.
À partir de combien d'années sa valeur sera-t-elle inférieure à 40 % de sa valeur initiale ?

Notons $V(x)$ la valeur atteinte par la voiture au bout de x années. On a $V(x) = 12000\left(1 - \frac{20}{100}\right)^x$.
On cherche x tel que $V(x) \leqslant 12000 \times \frac{40}{100} = 4800$. Or :

$$\begin{aligned} V(x) \leqslant 4800 &\Leftrightarrow 12000\left(1-\frac{20}{100}\right)^x \leqslant 4800 \\ &\Leftrightarrow \left(1-\frac{20}{100}\right)^x \leqslant \frac{4800}{12000} = 0,4 \\ &\Leftrightarrow 0,8^x \leqslant 0,4 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0,8^x\right) \leqslant \ln 0,4 \\ &\Leftrightarrow x \ln 0,8 \leqslant \ln 0,4 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{\ln 0,4}{\ln 0,8} \text{ car } \ln 0,8 \text{ est négatif} \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln 0,4}{\ln 0,8} \approx 4,1$, donc la valeur de la voiture sera inférieure à 40 % de sa valeur initiale après environ 4,1 ans.

7.4 Dérivées

7.4.1 Dérivée de la fonction ln

Propriété 7.7. *La fonction* ln *est dérivable sur* $]0\,;\,+\infty[$*, et pour tout* $x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Remarque. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$. D'où le tableau de variation de la fonction ln.

x	
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
$\ln x$	

On retrouve bien le sens de variation de la fonction ln sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

7.4.2 Dérivée d'une fonction de la forme ln(*u*)

Théorème 7.8. *Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.*
La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et pour tout x de I, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Remarque. Pour simplifier, on écrit : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

EXERCICE 7.5.
Soit f la fonction définie sur $]-\frac{1}{3}\,; +\infty[$ par $f(x) = \ln(3x+1)$. Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

7.5 Exercices

7.5.1 Propriétés algébriques

EXERCICE 7.6.
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln 6 - \ln 2$
2. $\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
3. $\ln 3 - \ln 9$
4. $\ln 2 + \ln 4 - \ln 8$
5. $\frac{1}{4}\ln 81$
6. $\ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2\ln\sqrt{3}$
7. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$
8. $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\right) - \ln(\sqrt{3}-1)$

EXERCICE 7.7.
Donner, en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 5$ les valeurs de :

1. $\ln 10$
2. $\ln 25$
3. $\ln 16$
4. $\ln 400$
5. $\ln\left(\frac{2}{25}\right)$
6. $\ln\left(\frac{1}{100}\right)$
7. $\ln\left(\frac{5}{8}\right)$
8. $\ln 0,4$
9. $\ln\sqrt{5}$
10. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
11. $\ln\left(5\sqrt{10}\right)$
12. $\ln\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

EXERCICE 7.8.
a et b étant deux réels strictements positifs, donner en fonction de $\ln a$ et de $\ln b$ les valeurs de :

1. $\ln\left(\dfrac{a}{b^2}\right)$
2. $\ln\left(a^3 \times b^5\right)$
3. $\ln\left(ab^3\right)$
4. $\ln\left(\dfrac{b^2}{a^3}\right)$
5. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$
6. $\dfrac{\ln a}{\ln\left(ab^2\right)}$
7. $\dfrac{\ln\left(ab^4\right)}{\ln b}$

+ Exercices 35 à 38 p 201.

7.5.2 Résolutions

EXERCICE 7.9.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs interdites pour x puis résoudre sur l'intervalle indiqué :

1. $\ln x > 1$ pour $x \in]0\,; +\infty[$.
2. $\ln x = 2$ pour $x \in]0\,; +\infty[$.
3. $\ln x < -1$ pour $x \in]0\,; +\infty[$.
4. $3 - \ln x \leq 0$ pour $x \in]0\,; +\infty[$.
5. $\ln x = -3$ pour $x \in]0\,; +\infty[$.
6. $2\ln(x+1) = 0$ pour $x \in]-1\,; +\infty[$.
7. $\dfrac{1}{\ln x + 1} > 0$ pour $x \in]0\,; +\infty[$.
8. $\ln(2x+1) = 1$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,; +\infty\right[$.
9. $\ln\left(x^2\right) = -1$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
10. $\ln[x(x+1)] = 0$ pour $x \in]-\infty\,; -1[\cup]0\,; +\infty[$.
11. $\ln x + \ln(x+1) = 0$ pour $x \in]0\,; +\infty[$.
12. $2\ln x - 1 = 0$ pour $x \in]0\,; +\infty[$.
13. $2x\ln x + x = 0$ pour $x \in]0\,; +\infty[$.
14. $(x-1)(1+\ln x) = 0$ pour $x \in]0\,; +\infty[$.
15. $x\ln(x+2) = 0$ pour $x \in]-2\,; +\infty[$.

+ Exercices 78 et 80 p 206

7.5.3 Fonctions comportant $\ln x$

Exercices 10 et 11 p 193, 33 et 34 p 201, 48 à 56 p 202

7.5.4 Fonctions comportant $\ln u$

Exercices 22 et 23 p 198, 60 p 203

7.5.5 Exercices de synthèse

91 et 92 p 211, 94 p 212