BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Hiver 2015

Épreuve : MATHÉMATIQUES

Séries
SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES, toutes spécialités
LITTÉRAIRE, spécialité Mathématiques

Classes
TES1, TES2, TES3, TES4 ET TL1ES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

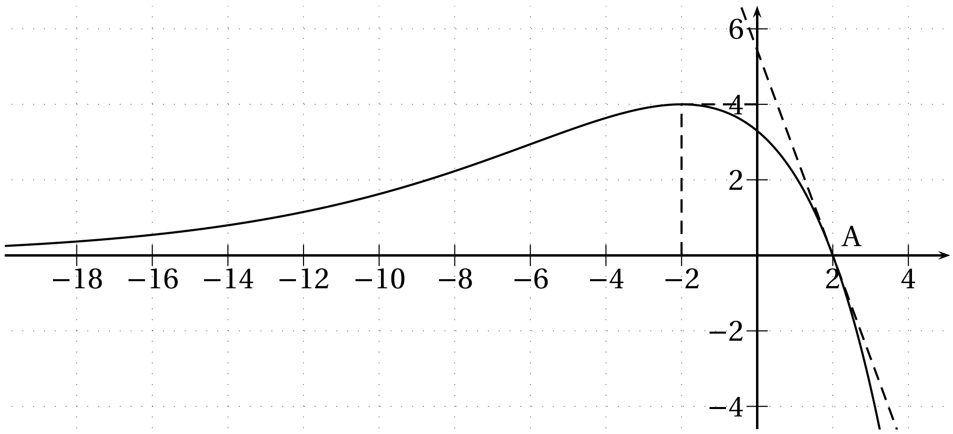
Le barème n'est qu'indicatif.

Le sujet comporte 6 pages.

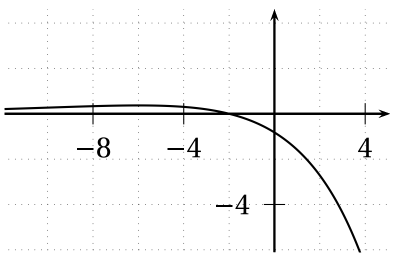
EXERCICE 1 (5 points).
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Indiquer ***sur la copie*** *le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ou des réponses multiples n'apportent, ni n'enlèvent aucun point.

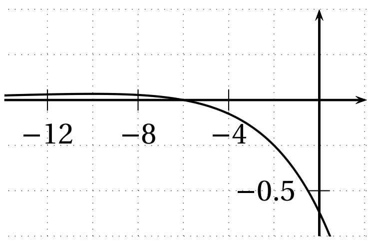
On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2.



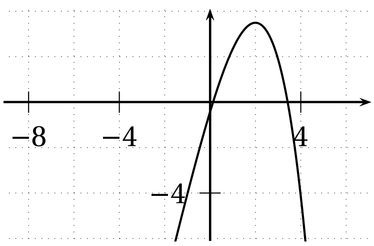
1. Quelle est l'équation de la tangente à C_f en A ?
   (a) $y = -\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}$ (b) $y = 3x + 2\mathrm{e}$ (c) $y = \mathrm{e}x + 3\mathrm{e}$ (d) $y = -5x + 4\mathrm{e}$
2. La fonction f est :
   (a) concave sur $]-\infty\,;\,0]$
   (b) convexe sur $]-\infty\,;\,0]$
   (c) concave sur $[0\,;\,2]$
   (d) convexe sur $[0\,;\,2]$
3. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente f' la fonction dérivée de la fonction f ?
4. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente f'' la dérivée seconde de la fonction f ?
5. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente une fonction F telle que $F' = f$?



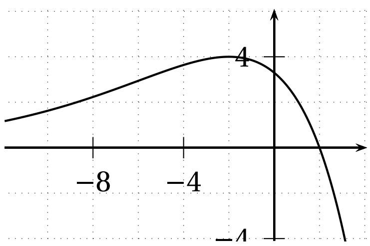
(a)



(c)



(b)



(d)

EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et pour les candidats de la série L

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

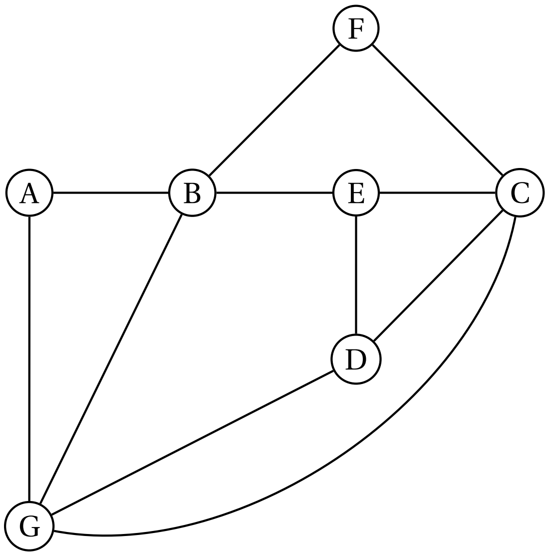
- L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;
- C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Les calculs devront être justifiés par des formules.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer $P(L \cap C)$ la probabilité de l'évènement $L \cap C$.
3. Montrer que $P(C) = 0{,}5675$.
4. Calculer $P_C(L)$, la probabilité de l'évènement L sachant l'évènement C réalisé. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.
5. On interroge douze élèves au hasard parmi les élèves de l'établissement. Le nombre d'élèves dans l'établissement est suffisamment grand pour que le choix des élèves soit assimilé à un tirage avec remise.
   Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi binomiale.
   (b) Calculer la probabilité qu'exactement les trois quarts des élèves interrogés soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins un tiers des élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.

EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un groupe d'amis part en randonnée en Corse et désire passer plusieurs jours à découvrir 7 lacs de montagne.
Pour optimiser leur trajet, ils décident de préparer leur randonnée en se servant d'un graphe.
Ils nomment A, B, C, D, E, F et G les 7 lacs qu'ils représentent par des sommets, les arêtes du graphe représentent les sentiers possibles pour rejoindre deux lacs.
Voici leur graphe :



Sauf si cela est précisé, on ne demande pas de justification.

Partie A.

1. Ce graphe est-il complet ? Justifier et interpréter votre réponse en termes de randonnée.
2. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.
3. Donner l'ordre du graphe et déterminer le degré de chacun de ses sommets.
4. Déterminer le nombre d'arêtes du graphe en justifiant à l'aide de la question précédente.
5. Déterminer la matrice d'adjacence M de ce graphe.

Partie B.

1. Les amis peuvent-ils parcourir tous les sentiers sans repasser deux fois par le même sentier ? Si oui, donner un exemple de randonnée possible ; si non, justifier.
2. L'un des amis insiste pour parcourir tous les sentiers sans repasser deux fois par le même, tout en faisant ce qu'il appelle une boucle, c'est-à-dire en revenant au point de départ.
   (a) Justifier que cela n'est pas possible.
   (b) Proposer une modification du graphe pour que cela le soit en justifiant.
   (c) Interpréter votre modification en termes de randonnée.

Partie C.
Certains amis ont peur de ne pas tenir le rythme, aussi décident-ils de se concentrer sur le lac A et le lac D et de se limiter à des randonnées de 4 étapes, c'est-à-dire comportant exactement 4 sentiers.
Combien y a-t-il de randonnées de 4 étapes conduisant du lac A au lac D ? Justifier.

EXERCICE 3 (5 points).
Commun à tous les candidats

Le responsable du foyer des jeunes d'un village a décidé d'organiser une brocante annuelle. Pour la première brocante, en 2012, il a recueilli 110 inscriptions.
D'après les renseignements pris auprès d'autres organisateurs dans les villages voisins, il estime que d'une année sur l'autre, 90 % des exposants se réinscriront et que 30 nouvelles demandes seront déposées.
On désigne par u_n le nombre d'exposants en $(2012+n)$ avec n un entier naturel.
Ainsi u_0 est le nombre d'exposants en 2012, soit $u_0 = 110$.

1. Quel est le nombre d'exposants attendu pour 2013 ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 30$.
3. Vu la configuration actuelle de la manifestation dans le village, le nombre d'exposants ne peut pas excéder 220.
   (a) **Recopier** et compléter l'algorithme proposé ci-dessous afin qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle l'organisateur ne pourra pas accepter toutes les demandes d'inscription.

Initialisation :	Affecter à u la valeur …
	Affecter à a la valeur 2012
Traitement :	Tant que …
	Affecter à u la valeur …
	Affecter à a la valeur $a+1$
Sortie :	Afficher …

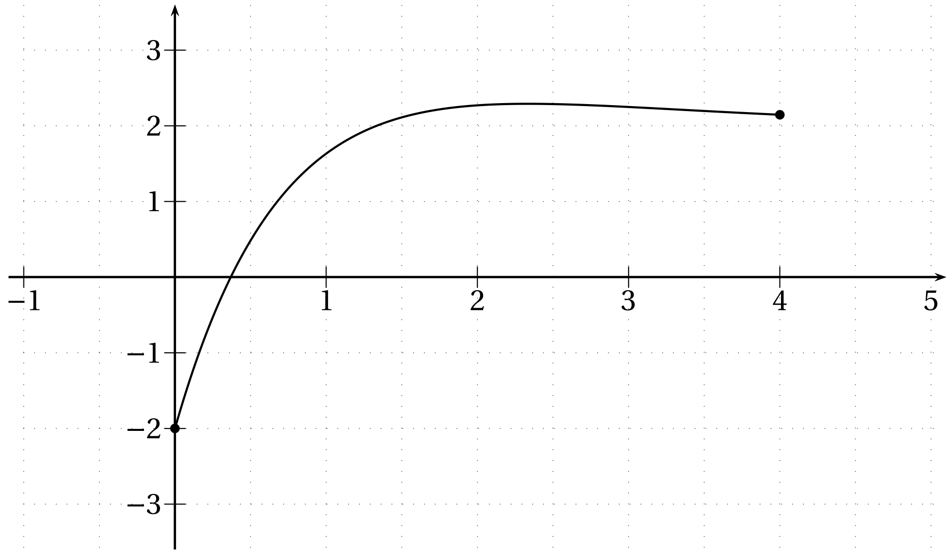
   (b) Indiquer la valeur qu'affiche l'algorithme.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 300$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = -190 \times 0,9^n + 300$.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Retrouver le résultat que renvoie l'algorithme de la question 3a en utilisant la formule de la question 4b.
6. L'organisateur décide d'effectuer une démarche auprès de la mairie pour obtenir assez de place pour ne jamais refuser d'inscriptions. Il affirme au maire qu'il suffit de lui autoriser 300 emplacements. A-t-il raison de proposer ce nombre ? Pourquoi ?

EXERCICE 4 (5 points).
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par

$$f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^{-x}+2$$

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de cette fonction.



Aucune justification graphique ne sera acceptée.

Partie A.

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   (a) Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;4]$, $f'(x) = (7-3x)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
   Toutes les valeurs du tableau seront données à 10^{-2}.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;4]$.
   (b) Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.

Vous traiterez, au choix, la partie B ou la partie C.

Partie B.

1. Déduire de la partie A le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x sur l'intervalle $[0\,;4]$.
2. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par

$$F(x) = (1-3x)\mathrm{e}^{-x}+2x$$

   (a) Montrer que F a pour dérivée f sur $[0\,;4]$.
   (b) En déduire les variations de F sur $[0\,;4]$.

ou bien

Partie C.

On désigne par f'' la dérivée seconde de la fonction f.

1. Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;4]$, $f''(x) = (3x-10)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
3. Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.